Vollständiger Lehrkurs

der

reinen Mathematik

von

L. B. Francoeur,

Professor der Mathematik an der Universität zu Paris, Mitgliede der philomatischen Gesellschaft, Ritter der Ehrenlegion u. s. w.

Nach der vierten verbesserten und vermehrten Original-Ausgabe (1837) aus dem Französischen übersetzt, mit Anmerkungen und Zusätzen versehen

von

Dr. **Edmund Külp,**

Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Gewerbschule in Darmstadt.

Ersten Bandes viertes Buch,

enthaltend

die analytische Geometrie in der Ebene.

Mit vier Kupfertafeln.

Bern, Chur und Leipzig,

Verlag und Eigenthum von J. F. J. Dalp.

1839.

Cas.

Inhalt des vierten Buches.

(Analytische Geometrie in der Ebene.)

Seite

Erstes Kapitel.

Anwendung der Algebra auf die Elementar-Geometrie.

Einige Aufgaben über die Linien und Flächen 1
Geometrische Construction algebraischer Ausdrücke 5
Von der Bedeutung der Zeichen der Größen in der algebraischen Geometrie 17
Von der Methode der Coordinaten 27

Zweites Kapitel.

Ebene Trigonometrie.

Von den trigonometrischen Linien 28
Allgemeine Formeln 36
Von der Construction der trigonometrischen Tafeln 43
Von der Auflösung der Dreiecke 46
Trigonometrische Auflösung mehrerer Aufgaben aus der Geometrie . 53
Anwendung der trigonometrischen Lehrsätze auf einige andere Aufgaben 58

Drittes Kapitel.

Gleichungen der geraden Linie und des Kreises.

Von der geraden Linie 62
Von dem Kreise 74
Von der Transformation der Coordinaten 80
Von den Polarcoordinaten 82

Seite

Viertes Kapitel.

Von den Kegelschnitten.

Von der Ellipse 85
Von der Hyperbel 89
Von der Parabel 92
Von den in einem Kegel durch eine Ebene gemachten Schnitten . . 95
Von den Tangenten der Curven 98
Von den Asymptoten der Hyperbel und Einiges noch über die Methode der Tangenten 112
Von dem Mittelpunkt und den Durchmessern 119
Diskussion der Gleichungen des zweiten Grades 136

Fünftes Kapitel.

Analytisch-geometrische Aufgaben.

Ueber die Entstehung der Curven 164
Aufgaben, welche den zweiten Grad übersteigen 172

Sechstes Kapitel.

Von einigen andern Curven.

Curven höherer Grade 179
Transcendente Linien 185
Chordentafel 193
Noten 195

Erstes Kapitel.

Algebraische Geometrie.

Einige Aufgaben über die Linien und Flächen.

§. 1. So lange Algebra und Geometrie von einander getrennt wurden, waren in beiden die Fortschritte nur langsam, ihre Anwendungen nur von beschränkter Art. Beide Wissenschaften unterstützten sich aber wechselseitig und gingen raschen Schrittes der Vollkommenheit entgegen, in dem Moment als man sie in Verbindung mit einander gesetzt hatte. Wir verdanken den Mathematikern Vieta und Descartes die Anwendung der Algebra auf die Geometrie, eine Anwendung, die seither der Schlüssel zu den größten Entdeckungen in allen Zweigen der Mathematik geworden ist. Indem wir also die Größen, welche die Theile einer Figur bilden, in die algebraischen Formeln einführen, übertragen wir in die Geometrie alle Hülfsmittel der Algebra; ohne Mühe werden wir auf diese Weise zu Resultaten gelangen, welche man vermittelst der Geometrie allein nur schwer erhalten hätte. Zwar hat die letztere den Vorzug, daß sie den Hauptgegenstand nie aus den Augen verliert, und überall den eingeschlagenen Weg beleuchtet, welcher von den ersten Grundsätzen an bis zu den entferntesten Folgerungen führt; bei weitem mehr Hülfsmittel aber bietet die Algebra uns dar.

Dergleichen Betrachtungen veranlassen uns, in der Elementar-Geometrie den directen Methoden den Vorzug zu geben, d. h. denjenigen, welche auf keinem fremdartigen Prinzipe beruhen, und uns so zu sagen gestatten, jeden Lehrsatz zu isoliren, indem er als eine

eben so klare Wahrheit wie der Grundsatz, von welchem ausgegangen worden ist, dargestellt wird. Diese Methode, welche Synthesis heißt, verliert aber an Klarheit, die ihren größten Vorzug ausmacht, sobald die Aufgaben eine mehr verwickelte Gestalt annehmen. Die Analysis erhält nun die Oberhand, durch ihren fruchtbaren Einfluß werden die Resultate allgemeiner, die Untersuchungen einfacher; sie bringt selbst, mit Geschicklichkeit angewendet, in ihre Kunstgriffe eine Eleganz und Klarheit, welche der Mechanismus der Rechnung zu verbieten schien. Die folgenden Beispiele werden dieser Behauptung einigermaßen als Bestätigung dienen:

§. 2. I. Die Entfernung eines unzugänglichen Punktes D von einem andern A zu finden (Fig. 1). Man nimmt in der Richtung AD ein beliebiges Stück AC, bildet ein willkührliches Dreieck ABC; mißt dann dessen Seiten $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$; wählt darauf in der Linie BC irgend einen Punkt E, von wo aus man nach D visirt. Es sei $AD = x$, $EC = g$, $FA = d$. Die zu AB parallel gezogene Gerade EG gibt erstens:

$$\frac{BC}{EC} = \frac{CA}{CG} = \frac{AB}{EG}; \text{ oder } \frac{a}{g} = \frac{b}{CG} = \frac{c}{EG}; \text{ folglich}$$

$$CG = \frac{bg}{a},\ EG = \frac{cg}{a}.$$

Zweitens ist $\frac{DA}{FA} = \frac{DG}{EG}$, oder $\frac{x}{d} = \frac{DG}{EG}$.

Man hat aber $DG = DA - GA = DA - (CA - CG)$, oder $DG = x - b + \frac{bg}{a}$. Wird dieser Werth durch den von EG dividirt, so findet man $\frac{x}{d} = \frac{ax - ba + bg}{cg}$; woraus $x = bd \cdot \frac{(g - a)}{cg - ad}$. Ereignet es sich, daß $BF = AF$, was anzunehmen in unserer Macht steht; so reducirt sich die Auflösung auf $x = b \cdot \frac{g - a}{2g - a}$, da in diesem Falle $c = 2d$ wird. Um x in Zahlen ausgedrückt zu erhalten, handelt es sich jetzt nur noch darum, anstatt a, b, c, d und g ihre numerischen Werthe, oder die Zahlen, zu setzen, welche angeben, wie oft jene Linien die zum Grund gelegte Einheit enthalten.

Anmerkung. Wir werden in der Folge die Winkel der Dreiecke

stets durch A, B, C... und durch a, b, c... die ihnen bezüglich gegenüberliegenden Seiten bezeichnen.

II. Welche Relation findet zwischen den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks ABC (Fig. 2) und dem Radius R des umschriebenen Kreises statt? Man ziehe den Durchmesser BD und die Linien AD, DC. Das Viereck ABCD gibt $2Rb = c \times CD + a \times AD$ (Geometrie §. 88). Die rechtwinkligen Dreiecke BCD, BAD geben

$$CD = \sqrt{(4R^2 - a^2)},\ AD = \sqrt{(4R^2 - c^2)};\ \text{folglich}$$

$$2Rb = c\sqrt{(4R^2 - a^2)} + a\sqrt{(4R^2 - c^2)}.$$

Mittelst dieser Gleichung sind wir im Stande eine der Größen a, b, c und R durch die drei andern zu finden.

III. Sind also die Sehnen zweier Bogen AB, BC desselben Kreises und dessen Radius gegeben; so läßt sich die Sehne b der Summe jener Bogen berechnen. Wird der Bogen AB = BC oder a = c gesetzt, so hat man $Rb = a\sqrt{(4R^2 - a^2)}$. Aus dieser Gleichung ergibt sich die Sehne eines Bogens durch die Sehne a des halben Bogens.

Anmerkung. Wäre dagegen die Sehne c des Unterschieds zweier Bogen, deren Sehnen b und a gegeben sind, zu berechnen; so erhält man dieselbe aus unserer Gleichung, wenn man solche in Bezug auf c auflöst. Man findet nämlich $R^2(b^2 - a^2 - c^2)^2 = a^2c^2(4R^2 - b^2)$, und hieraus $c = \frac{b}{2R}\sqrt{(4R^2 - a^2)} - \frac{a}{2R}\sqrt{(4R^2 - b^2)}$.

IV. Man soll den Radius R des dem Dreieck umschriebenen Kreises finden. Wir erheben deshalb unsere Gleichung aufs Quadrat, bringen dann die rationalen Glieder auf einerlei Seite; erheben das Resultat gleichfalls aufs Quadrat, wodurch die Wurzelgröße verschwindet. Wir erhalten auf diese Weise $R = \frac{abc}{\sqrt{[4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]}}$.

Diese Formel bekommt eine für die Rechnung mit Logarithmen bequemere Gestalt, wenn man erwägt, daß die Größe unter dem Wurzelzeichen als die Differenz zweier Quadrate $= (2ac + a^2 + c^2 - b^2) \times (2ac - a^2 - c^2 + b^2)$, oder $= [(a + c)^2 - b^2] \times [b^2 - (a - c)^2]$. Da jeder dieser Faktor eine ähnliche Zerlegung zuläßt, so erhält man

$$R = \frac{abc}{\sqrt{[(a+b+c)\ (b+c-a)\ (a+c-b)\ (a+b-c)]}},$$

oder $R = \frac{\frac{1}{4}abc}{\sqrt{[p(p-a)(p-b)(p-c)]}}$,

wenn der Kürze halber der Umfang $a+b+c=2p$ gesetzt wird.

V. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks ABC (Fig. 3) einen Ausdruck für seinen Flächeninhalt z zu finden. Wenn man auf die Seite CA eine Senkrechte BD herabläßt, so ist das Segment $AD = x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}$. Das rechtwinklige Dreieck ABD gibt $BD = \sqrt{(c^2-x^2)}$ Der Flächeninhalt $z = \frac{1}{2b} \times BD$ reducirt sich hiernach auf $z = \frac{1}{4}\sqrt{[4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2]}$, oder $z = \sqrt{[p(p-a)(p-b)(p-c)]}$.

Für den Radius des umschriebenen Kreises besteht demnach die Gleichung $4Rz = abc$.

VI. Den Radius r des dem Dreieck ABC (Fig. 4) eingeschriebenen Kreises zu finden. Die Flächeninhalte der Dreiecke AOB, AOC und BOC sind bezüglich $\frac{1}{2}cr$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}ar$. Hiernach die Gleichung $z=pr$, woraus $r = \frac{z}{p} = \sqrt{\left(\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right)}$.

VII. Den Flächeninhalt eines Vierecks ABCD (Fig. 5) zu finden. Man ziehe die Diagonale $AC = d$, und nehme dieselbe als Basis der beiden Dreiecke ABC, ADC an. Bezeichnen nun K und K′ die Höhen dieser Dreiecke, so wird der gesuchte Flächeninhalt durch $\frac{1}{2}d\,(K+K')$ ausgedrückt.

Man kann auch auf folgende Art verfahren: Man fällt nämlich die Senkrechten $DE = h$, $CF = h'$ auf die Basis $AB = a$. Setzt man $AE = e$ und $FB = e'$, so kommt Flächeninhalt $CFED = \frac{1}{2}(h+h') \times (a-e-e')$. Ferner ist $ADE = \frac{1}{2}eh$, $CBF = \frac{1}{2}e'h'$; folglich die Summe dieser Flächeninhalte oder das Viereck $ABCD = \frac{1}{2}(a-e)\,h' + \frac{1}{2}(a-e')h$.

Diese Gleichung, welche in der Anwendung nicht die geringste Schwierigkeit hat, findet nicht mehr statt, sobald eine der Senkrechten ausserhalb des Vierecks fällt. So z. B. muß in der Figur 6 die Größe e in $-e$ und e' in $-e'$ verwandelt werden.

VIII. Auf die Basis eines Dreiecks ABC (Fig. 7) eine Senkrechte EF dergestalt zu errichten, daß die Dreiecke AEF, ABC in einem gegebenen Verhältniß m zu n stehen. Werden die Grundlinien

AC, AE durch b und x, die Höhen BD, EF durch h und y bezeichnet; so werden die Flächeninhalte gedachter Dreiecke durch $\frac{1}{2}bh$, $\frac{1}{2}xy$ ausgedrückt. Hieraus entsteht die Gleichung $\frac{xy}{bh} = \frac{m}{n}$. Die ähnlichen Dreiecke AEF, ABD geben aber $\frac{y}{h} = \frac{x}{k}$, wenn man AD $= k$ setzt. Die Elimination von y gibt die Gleichung $x = \sqrt{\frac{kbm}{n}}$. Ist $x > k$ oder AD, so liegt der Punkt E jenseits des Punktes D; die auf AC errichtete Senkrechte schneidet alsdann ein Dreieck ab, welches nicht mehr in dem Dreieck ABC enthalten ist. Dieser Fall findet statt, wenn $bm > kn$, oder $\frac{m}{n} > \frac{k}{b} = \frac{AD}{AC}$.

Geometrische Constructionen.

§. 3. Die Kunst, die in das Gebiet der Geometrie einschlagenden Aufgaben zu lösen, besteht, wie man aus den in den §§. 67 und 76 der Elementar-Geometrie angeführten Beispiele ersehen kann, darin, daß man solche Aufgaben als gelöst betrachtet, die Eigenschaften der vorgelegten Figur mit bekannten und analogen vergleicht, und dergestalt die Beziehung auffindet, in welcher die verschiedenen Theile des Systems zu einander stehen, und hieraus endlich die unbekannten Größen ermittelt. Dergleichen Verfahren erfordern öfters viel Uebung und Geschicklichkeit, und man kann keine allgemeinen Regeln angeben, nach denen die auf das Problem Bezug habenden Umstände sich algebraisch ausdrücken lassen. Die Anwendung der Algebra führt bei einer schicklichen Wahl der Unbekannten öfters zu eleganten Auflösungen; dabei lehrt sie die Anzahl der letztern kennen und zeigt, ob das Problem möglich oder unmöglich, bestimmt oder unbestimmt sei.

Denken wir uns nach geschehener Auflösung einer geometrischen Aufgabe die Figur, welche ihre verschiedenen Theile untereinander verbindet, construirt, durch Buchstaben die Längen der darin vorkommenden Linien dargestellt, und diese vermittelst bekannter Sätze in die gehörigen Gleichungen gebracht; so wird die Rechnung uns bald zu dem Werthe der Unbekannten führen. Die Regeln der Arithmetik werden solche numerisch bestimmen, wenn sämmtliche Linien durch Zahlen ausgedrückt sind. Uebrigens können diese gesuchten

Linien, ohne Hülfe der Zahlen, vermittelst bloßer graphischer Operationen bestimmt werden; dergleichen Verfahren sind desto eleganter je weniger verwickelt sie die Figur machen. Man nennt solche Bestimmungsarten die Constructionen der Werthe der Unbekannten.

§. 4. Vor allen Dingen verdient bemerkt zu werden, daß die Bestandtheile des Calculs, dessen so eben Erwähnung geschehen ist, nur Verhältnisse von Linien sein können. Dergestalt kann die Linie A daselbst nur in so fern eingeführt worden sein, als man ihr Verhältniß zu einer andern Linie B berücksichtigt hat, welche man als Einheit annehmen darf. (Geometrie §. 22.) Alsdann stellt $\frac{A}{B}$ eine abstracte Zahl dar, an deren Stelle das Verhältniß zweier andern beliebigen Größen a und b treten kann, vorausgesetzt, daß $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$. Es kommen also in den Rechnungen eigentlich nur solche Ausdrücke wie $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}\ldots$, vor. Aus den Regeln des Calculs ergibt sich aber von selbst, daß jede mögliche Verbindung dergleichen Elemente auf dem Weg der Multiplication, Division, Reduction auf einerlei Nenner u. s. w. zu einem homogenen Resultat führt, d. h. zu einem Ausdruck, dessen Glieder sämmtlich aus gleich vielen Factoren bestehen. In einer Formel können also die Buchstaben a, b, c... Linien statt der Zahlen darstellen, dabei müssen aber die Glieder der Formel homogen sein. Ist solches nicht der Fall, so hat man eine dieser Linien, wie z. B. r, der Einheit gleich angenommen, welche Einheit übrigens eine willkührliche aber bekannte Länge ist. Nichts hindert hier den Factor r überall, wo er bei der Annahme von $r = 1$ verschwinden mußte, wieder erscheinen zu lassen, d. h. r und angemessene Potenzen von r in den verschiedenen Gliedern einzuführen, damit sie wieder homogen werden. Sollen z. B. die Ausdrücke

$$\frac{2a^4c + ab^3 - d}{b^4 + a^3 - c}, \quad \frac{a - b}{1 + ab}, \quad \sqrt{\frac{1 \pm a}{2}}$$

Linien darstellen, so müssen sie in folgende umgewandelt werden:

$$\frac{2a^4c + ab^3r - dr^4}{b^4 + a^3r - cr^3}, \quad \frac{(a - b)r^2}{r^2 + ab}, \quad \sqrt{\frac{r^2 \pm ar}{2}}.$$

Für $x = \sqrt{\frac{1 \pm a}{2}}$ z. B. erhält man, wenn das Wurzelzeichen

zum Verschwinden gebracht wird, $2x^2 = 1 \pm a$; welche Gleichung durch angemessene Potenzen von r in $2x^2 = r^2 \pm ar$ verwandelt wird. In dem letzten Ausdrucke kann man auch jede von r verschiedene Größe, selbst eine darin nicht vorkommende Länge als Einheit annehmen.

In einer homogenen Formel, worin keine Nenner erscheinen, schätzen wir den Grad oder die Dimension derselben nach der Anzahl der Factoren eines ihrer Glieder; im Falle die Formel gebrochen ist, ziehen wir den Grad des Nenners von dem des Zählers ab; wir dividiren endlich, wenn sie irrational ist, den Grad derselben durch den ihres Wurzelzeichens. Hieraus schließen wir, daß ein Bruch, um eine Linie darzustellen oder um linear zu sein, in jedem Gliede des Zählers einen Factor mehr als im Nenner enthalten muß; und daß, falls Wurzelgrößen vorkommen, die Glieder unter dem Wurzelzeichen immer von dem nämlichen Grade als der der Wurzel sind. Bei quadratischen Gleichungen z. B. wird also die Größe unter dem Wurzelzeichen immer vom zweiten Grade sein. Die Formeln von der ersten Dimension oder dem ersten Grade lassen sich vermittelst Linien construiren; die Formeln von der zweiten Dimension drücken eine Fläche, die von der dritten Dimension endlich ein Volumen aus. Die nicht homogenen Formeln werden dadurch homogen, daß man angemessene Potenzen der als Einheit angenommenen Linie r erscheinen läßt.

§. 5. Jeder eingliedrige lineare Bruch kann nur eine von folgenden Formen haben: $x = \frac{ab}{c}$, $x = \frac{abc}{de}$, $x = \frac{abcd}{efg}$..... Der letzte Ausdruck z. B. ist mit $\frac{a}{e} \times \frac{b}{f} \times \frac{c}{g} \times d$ einerlei, woraus ersichtlich ist, daß die Linie d so viel mal genommen werden soll, als Einheiten in dem Produkt der abstracten Verhältnißzahlen $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{f}$, $\frac{c}{g}$ enthalten sind.

1) Die Construction von $x = \frac{ab}{c}$ bietet keine Schwierigkeit dar: x ist nämlich die vierte Proportionallinie zu den drei Linien c, a und b. Man kann sie nach §. 63 der Geometrie finden; auch lassen sich die Sätze der §§. 73 und 75 in Anwendung bringen.

2) Um die Gleichung $x = \frac{abc}{de}$ zu construiren, suche man eine

Linie $k = \frac{ab}{d}$, hieraus $x = \frac{kc}{e}$: die Construction reducirt sich also **auf** das Auffinden von zwei vierten Proportionallinien.

3) Ebenso wird $x = \frac{abcd}{efg}$ construirt, indem zuvörderst $k = \frac{ab}{c}$ und $l = \frac{cd}{f}$ gefunden wird, woraus $x = \frac{kl}{g}$. Drei Constructionen sind also nöthig. Auf ähnliche Weise verfährt man in ähnlichen Fällen.

§. 6. Hat man den vielgliedrigen Bruch $x = \frac{abc + def - ghi}{lm}$, dessen Nenner ein Monom ist, zu construiren; so schreibt man $x = \frac{abc}{lm} + \frac{def}{lm} - \frac{ghi}{lm}$. Man construirt dann jeden Bruch besonders, und hat so drei Linien zu addiren oder zu subtrahiren. Für den Fall, daß $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$ ist es kürzer $x = \frac{(a+b)\ (a-b)}{c}$ zu setzen, und die vierte Proportionallinie zu den Linien c, $a + b$ und $a - b$ zu suchen.

§. 7. Ist der Nenner ein Polynom, so führt man solches auf ein Monom dadurch zurück, daß man es einem einzigen Gliede von der nämlichen Dimension gleichsetzt, dessen sämmtliche Factoren man nach Belieben annimmt, mit Ausnahme des einen y, welcher unbekannt ist, und, wie oben gelehrt wurde, bestimmt wird. Es sei z. B.

$x = \frac{abc+def}{ab+cd}$; man setze $ab + cd = ay$; hieraus

$x = \frac{abc}{ay} + \frac{def}{ay} = \frac{bc}{y} + \frac{def}{ay}$, und $y = b + \frac{cd}{a}$. Die zweite Gleichung gibt y, die erste dann x.

Für den Ausdruck $x = \frac{abc^2 + q^3k - m^3p}{q^2i - klq + cmd}$ setzt man den Nenner $q^2i - klq + cmd = q^2y$; hieraus $y = i - \frac{kl}{q} + \frac{cmd}{q^2}$. Ist y bekannt, so hat man $x = \frac{abc^2}{q^2y} + \frac{qk}{y} - \frac{m^3p}{q^2y}$. Die Wahl der Faktoren der Unbekannten y geht zuweilen dahin aus, die Construktionen möglichst einfach zu machen, ein wenig Uebung und Geschicklichkeit erleichtern

die Anwendung dieses allgemeinen Princips. So wird der Ausdruck $x = \frac{abc^2 - a^2b^2}{abc + c^3}$ in $x = \frac{m(c-m)}{c+m}$ verwandelt, wenn man $m = \frac{ab}{c}$ setzt.

§. 8. Die Constructionen der Wurzelgrößen vom zweiten Grade lassen sich immer auf eine der folgenden Formen bringen: $x = \sqrt{ab}$, oder $x = \sqrt{(a^2 \pm b^2)}$. In der ersten Gleichung ist x die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen a und b; sie wird nach §. 73 der Geometrie construirt, auch kann sie vermittelst der in den §§. 74 und 75 enthaltenen Sätze verzeichnet werden. Was die zweite Gleichung $x = \sqrt{(a^2 \pm b^2)}$ anlangt, so kann x als Seite eines rechtwinkligen Dreiecks angesehen werden, dessen andere Seiten a und b sind. Um $x = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, zu construiren, nimmt man (Fig. 8) AB = a, AC = b auf zwei unbegrenzten, unter einem rechten Winkel sich schneidenden Linien AB und AC an; die Hypothenuse BC ist alsdann $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

Um $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ zu construiren, zieht man wie oben die Linien AB und AC, nimmt dann AB = b und beschreibt aus B mit einem Halbmesser BC = a einen Kreis, der AC in C schneidet; AC ist hiernach gleich $\sqrt{(a^2 - b^2)}$. Man kann auch, wie folgt verfahren: Man construirt über BC = a als Durchmesser den Halbkreis ABC, beschreibt darauf aus B mit einem Halbmesser AB = b einen Kreis, der den erstern in A schneidet; AC ist hiernach $= \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

§. 9. Um jede andere Wurzelgröße des zweiten Grades zu construiren, setzt man dieselbe, weil sie zwei Dimensionen haben muß, einem Produkte ay gleich, wo a eine Größe, die man nach Belieben wählt, und y eine Unbekannte bezeichnet; man erhält dann $x = \sqrt{ay}$. Der Werth von y läßt sich leicht finden; er ist nämlich ein Bruch, der nach dem oben Gesagten construirt wird. Es sei $x = \sqrt{\frac{(ab^2 + cd^2)}{b + c}}$; man setze $\frac{ab^2 + cd^2}{b + c} = ay$, also $y = \frac{b^2}{b+c} + \frac{cd^2}{a(b+c)}$. Die Construction von y läßt sich auf das Auffinden einer dritten und zweier vierten Proportionallinien zurückführen. Man erhält hernach $x = \sqrt{ay}$. Uebrigens wird das allgemeine Verfahren bei einiger Uebung öfters bedeutend vereinfacht. Soll man z. B. die Gleichung $x = \sqrt{(ac + bd)}$ construiren, so setzt man bd = ay; hieraus $y = \frac{bd}{a}$ und $x = \sqrt{a(c + y)}$. Ebenso verwandelt man $x = \sqrt{(ab + bc)}$ in $x = \sqrt{(a + c)b}$.

§. 10. Die Gleichung $x = \sqrt{(a^2 \pm b^2)}$ läßt sich auf dem nämlichen Wege construiren. Da jedoch die Construction mittelst des rechtwinkligen Dreiecks eine einfachere Auflösung darbietet; so führt man häufig die Wurzelgrößen vom zweiten Grade auf diese Form zurück. Die Gleichung $x = \sqrt{(a^2 \pm bc^2)}$ z. B. verwandelt sich in $x = \sqrt{(a^2 \pm y^2)}$, wenn man $y^2 = bc$ setzt; woraus $y = \sqrt{bc}$.

Auf ähnliche Weise kann man den Ausdruck $x = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$ construiren. Man setze $y = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; man nehme mithin auf den Seiten AB, BC des rechten Winkels B (Fig. 9) $AB = a$, $BC = b$, wonach $AC = y$ wird. Man erhält dann $x = \sqrt{(y^2 + c^2 + d^2 +) \ldots}$ hierauf construire man die Gleichung $y' = \sqrt{(y^2 + c^2)}$, was geschieht, indem man CD senkrecht auf AC zieht, und $CD = c$ macht. Hieraus $AD = y'$, und $x = \sqrt{(y'^2 + d^2 +) \ldots}$, u. s. w. Die letzte Hypothenuse AF ist x.

Um die Gleichung $x = \sqrt{(ac - fg + mq + rd)}$ zu construiren, setze man entweder $ac - fg + mq + rd = ay$; woraus $y = c - \frac{fg}{a} + \frac{mq}{a} + \frac{rd}{a}$ und $x = \sqrt{ay}$; oder man setze $ac = y^2$, $fg = z^2$, $mq = t^2$, $rd = u^2$, woraus $x = \sqrt{(y^2 + t^2 + u^2 - z^2)}$. Hat man endlich die Gleichung $x = \sqrt{[a^2 - f^2 \frac{(c^2 + d^2)}{ab + cd}]}$, so setze man $y^2 = f^2 \frac{(c^2 + d^2)}{ab + cd}$, woraus $x = \sqrt{(a^2 - y^2)}$. Es bleibt also nur noch y zu finden übrig. Man setzt deshalb $c^2 + d^2 = z^2$ und $ab + cd = t^2$. Leicht findet man z und t, und erhält $y = \frac{fz}{t}$.

Anmerkung. Die Construction der Wurzelgrößen, deren Wurzelgrad von der Form 2^n ist, kann auf die Construction der Wurzelgrößen vom zweiten Grade zurückgeführt werden. Als Beispiel diene die Gleichung $x = \sqrt[4]{(a^2bc + a^3d - d^2e^2)}$. Denn man hat $x = \sqrt[4]{[a^2(bc + ad - \frac{d^2e^2}{a^2})]} = \sqrt[4]{[a^2(m^2 + n^2 - p^2)]} = \sqrt[4]{a^2y^2} = \sqrt{ay}$, wenn $bc = m^2$, $ad = n^2$, und $\frac{de}{a} = p$ gesetzt und $m^2 + n^2 - p^2 = y^2$ gefunden ist.

§. 11. Das Vorhergehende wollen wir jetzt auf einige Beispiele anwenden:

I. Eine Linie AC (Fig. 10) in zwei Theile CB, AB zu theilen, welche in dem gegebenen Verhältniß m zu n zu einander stehen. Es sei AC = a, CB = x, also AB = a — x. Der Bedingung der Aufgabe zufolge hat man $\frac{x}{a-x} = \frac{m}{n}$, woraus $x = \frac{am}{m+n}$. Auf einer beliebigen Linie EC nimmt man demnach CD = m, ED = n, wenn m und n Linien sind; trägt dagegen, wenn es Zahlen sind, eine willkührliche Oeffnung des Zirkels m mal von C nach D, und n mal von D nach E. Zieht man darauf die Linie AE und ihre Parallele BD, so wird B der gesuchte Punkt sein.

II. In ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 11) ein Quadrat DEFG einzuschreiben. Es sei AH = h die Höhe und BC = b die Basis unseres Dreiecks, und DEGF das gesuchte Quadrat, dessen unbekannte Seite DE durch x bezeichnet werde. Vergleicht man die ähnlichen Dreiecke ADE und ABC, so ergibt sich folgende Proportion: AI : AH = DE : BC, oder h — x : h = x : b, woraus $x = \frac{hb}{h+b}$. Man hat also nur nöthig, zu den drei Linien h+b, h und b die vierte Proportionallinie zu finden.

Anmerkung. Der bloße Anblick der Figur zeigt, daß über gewisse Grenzen der Neigungen der Seiten gegen die Basis hinaus die Einschreibung des Quadrats innerhalb des Dreiecks unmöglich wird; die Grenze der innern Einschreibung hat offenbar statt, wenn eine der Seiten AB oder AC auf der Basis senkrecht steht. Der algebraische Ausdruck für x konnte diese Beschränkung nicht anzeigen, weil die Bedingung, aus der jener Ausdruck entnommen wurde, nämlich die Aehnlichkeit der △△ ADE und ABC fortbesteht, wenn auch die Neigung der Seiten AB und AC gegen die Basis die Einschreibung des Quadrats innerhalb des Dreiecks nicht mehr gestattet.

III. Zwei Parallelen BC, DE (Fig. 12) und ein Punkt A sind gegeben; man soll durch diesen Punkt eine schiefe Linie AI dergestalt ziehen, daß das zwischen den Parallelen enthaltene Stück IK einer gegebenen Länge c gleich sei. Man ziehe AG senkrecht auf DE, setze AG = a, FG = b, die Unbekannte GI = x. Man hat $\frac{AI}{AG} = \frac{IK}{FG}$

oder $\frac{AI}{a} = \frac{c}{b}$; ferner $AI^2 = a^2 + x^2$; folglich $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{(c^2 - b^2)}$. Man sieht zuvörderst, daß das Problem unmöglich wird, sobald $b > c$ oder $FG > IK$ ist. Um den gefundenen Werth zu construiren, beschreibt man aus F als Mittelpunkt mit dem Radius c den Bogen HH'; GH ist alsdann gleich $\sqrt{(c^2 - b^2)}$. Die zu FH parallel gelegte AI wird die gesuchte Linie sein, weil offenbar IG die vierte Proportionale zu b, a und GH ist. Man erhält in der Linie AI' eine zweite Auflösung, was durch das doppelte Zeichen des Werthes von x angezeigt wird.

IV. Zwei Punkte A und B (Fig. 13) und eine Gerade DD' sind gegeben; man soll durch jene zwei Punkte einen Kreis legen, der die gegebene Gerade zugleich berühre. Es reicht hin, den Berührungspunkt D zu finden. Es werde deshalb die Linie AB bis C verlängert, $CD = x$, $CI = a$, $IB = b$ gesetzt, wo I die Mitte von AB ist. Die Tangente CD gibt (Geometrie §. 75) $x^2 = CA \times CB = (a-b)(a+b)$; woraus $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Verzeichnet man über der Hypothenuse CI das rechtwinklige Dreieck ICE, dessen Katheten b und x sind, indem man den Halbkreis CEI beschreibt und $EI = AI$ macht; so wird CE der Werth der Unbekannten $x = CD$ sein. Man erhält in dem Punkte D' eine zweite Auflösung wegen des negativen Werthes von x.

V. Zwei Parallelen AE', BF (Fig. 14) nebst ihrer Entfernung AB sind gegeben; man soll eine Secante EF dergestalt ziehen, daß AC, die Hälfte von AB, mittlere Proportionallinie zwischen den Segmenten AE, BF werde. Es sei $AE = x$, $BF = y$, $AC = a$. Man erhält $a^2 = xy$; das Problem ist folglich unbestimmt und die Zahl der Auflösungen unbegrenzt. Unter den verschiedenen Methoden dieselben zu erhalten, ist die folgende eine der eleganteſten: Man setze $CD = r$, wo D der Durchschnittspunkt der gesuchten Linie EF mit der auf AB in ihrer Mitte C errichteten Senkrechten CD ist. Das auf CD gezogene Perpendikel II' gibt die beiden gleichen Dreiecke EDI, I'DF; also $y = r + IE$, $x = r - IE$, woraus $x + y = 2r$. Durch Elimination von y aus $a^2 = xy$ erhält man $x^2 - 2rx = -a^2$, wo r willkührlich ist; hieraus endlich $x = r \pm \sqrt{(r^2 - a^2)}$. Man muß demnach den Punkt D dergestalt wählen, daß $r > a$ oder $CD > AC$ ist. Der aus D als Mittelpunkt mit dem Radius r beschriebene Kreis gibt EI =

$\sqrt{(r^2 - a^2)}$; die Durchschnittspunkte E und F, desgleichen E' und F' leisten mithin unserer Bedingung Genüge. Jeder Mittelpunkt D gibt auf diese Weise zwei Auflösungen EF, E'F'.

VI. In einem Kreise ist ein Punkt A (Fig. 15) gegeben, man soll durch diesen Punkt eine Sehne BD ziehen, deren Segmente BA, AD in einem gegebenen Verhältnisse m : n zu einander stehen. Man ziehe den Durchmesser HAG; setze $CH = r$, $CA = b$, $AD = x$. Man hat $HA \times AG = BA \times AD$, woraus $r^2 - b^2 = x \times BA$. Vermöge der Voraussetzung aber $BA = \frac{mx}{n}$; folglich $\frac{mx^2}{n} = r^2 - b^2$. Setzen wir $r^2 - b^2 = k^2$, so kommt $x = \sqrt{\left(\frac{nk^2}{m}\right)}$, was leicht zu construiren ist. Man könnte diesem Ausdrucke folgende Form geben: $x = \frac{k}{m}\sqrt{mn}$, wonach man eine mittlere und eine vierte Proportionale zu suchen hätte. Nachstehendes Verfahren verdient jedoch den Vorzug. Wir ersetzen zuvörderst das Verhältniß $\frac{m}{n}$ durch das zweier Quadrate: auf einer unbestimmten Linie (Fig. 16) nehmen wir deshalb DF und FE dergestalt, daß $\frac{FE}{DF} = \frac{n}{m}$ ist, beschreiben darauf den Halbkreis DAE, errichten im Punkte F auf DE die Senkrechte FA, und ziehen die Sehnen AD, AE. Wir haben sonach $\frac{AE^2}{AD^2} = \frac{FE}{DF} = \frac{n}{m}$ (Geometrie §. 74); folglich $x = k \times \frac{AE}{AD}$. Nehmen wir also auf der Linie AD, welche man nöthigenfalls verlängert, das Stück $AB = k$, und ziehen BC zu DE parallel, so wird $AC = x$ sein.

Anmerkung. Wäre $m = n$, so müßte die gesuchte Sehne BD auf dem Durchmesser HAG senkrecht sein. In diesem Falle hätte man $x = k = \sqrt{(r^2 - b^2)}$. (Fig. 15)

VII. Ein Vieleck zu construiren, welches einem gegebenen ähnlich ist und zu dessen Flächeninhalt ein bekanntes Verhältniß m : n hat. Es sei a eine Seite des gegebenen Polygons, x die ihr homologe Unbekannte. Da die Flächeninhalte beider Polygone sich einerseits wie m : n, und anderseits wie $a^2 : x^2$ zu einander verhalten; so hat man $\frac{a^2}{x^2} = \frac{m}{n}$, woraus $x = a\sqrt{\frac{n}{m}}$. Dieser Ausdruck ist so-

eben (Fig. 16) construirt worden; x ist demnach eine bekannte Länge. Man hat also nur nöthig, auf der zu a homologen Seite x ein dem vorgelegten Vieleck ähnliches zu beschreiben (Geometrie §. 89). Die nämliche Construction gilt auch für Kreise.

Um das Verhältniß zweier gegebenen ähnlichen Figuren zu erhalten, nimmt man auf den Schenkeln eines rechten Winkels (Fig. 16) die Stücke AB, AC zweien homologen Seiten der vorgelegten Figuren bezüglich gleich an. Die Gerade BC wird dann durch ihre Senkrechte AG in zwei Segmente BG, CG geschnitten, welche in dem nämlichen Verhältniß wie diese Figuren stehen.

VIII. Eine Figur X zu finden, die einer gegebenen P ähnlich, und einer andern gegebenen Q gleich sei. Ist a eine Seite von P und x ihre homologe Unbekannte, so hat man $\frac{P}{X} = \frac{a^2}{x^2}$, woraus $\frac{P}{Q} = \frac{a^2}{x^2}$, weil $X = Q$. Bezeichnen m und n die Seiten zweier mit P und Q bezüglich gleich großen Quadrate, oder zweier Quadrate, welche in dem nämlichen Verhältnisse wie jene Polygone zu einander stehen, so ergibt sich $\frac{m}{n} = \frac{a}{x}$; x ist demnach die vierte Proportionale zu m, n und a.

IX. Zwei Linien x und y zu finden, welche in demselben Verhältnisse wie zwei gegebene Parallelogramme zu einander stehen. Sind B, b die Grundlinien, H und h die Höhen derselben, so hat man der Aufgabe zufolge $\frac{x}{y} = \frac{BH}{bh}$. Eine leichte Construction lehrt x kennen, sobald man y als gegeben betrachtet. Sind beide Linien dagegen unbekannt, so ist eine willkührlich. Man kann hier $y = b$ annehmen, woraus $x = \frac{BH}{h}$; x ist hiernach eine vierte Proportionale zu h, H und B. Diese Aufgabe läuft dahinaus, ein Rechteck hx zu construiren, dessen Höhe h bekannt ist, und mit einem gegebenen Rechteck BH denselben Flächeninhalt hat.

X. Will man $\sqrt{n}$ construiren, so nimmt man eine mittlere Proportionallinie zwischen n und 1. Beschreibt man einen Kreis, dessen Radius gleich der Einheit ist, so sind die Seiten des eingeschriebenen Quadrats und gleichseitigen Dreiecks bezüglich durch $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$

ausgedrückt. Was die Größen $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$... anbelangt, so kann man solche leicht construiren. Man nimmt nämlich auf den Schenkeln des rechten Winkels CBA (Fig. 9) das Stück $AB = 2$ und $CB = 1$, wodurch $AC = \sqrt{5}$. Zieht man ferner CD senkrecht auf AC und macht $CD = 1$, so ist $AD = \sqrt{6}$. Auf diese Art kann man die Quadratwurzeln aus allen Zahlen durch Construction finden.

§. 12. Die Gleichung vom zweiten Grade $x^2 + px = q$ setzt voraus, daß man eine Linie r als Einheit angenommen habe (§. 4). Man muß demnach qr oder vielmehr m^2 statt q setzen, wo $m^2 = qr$ ist. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 + px = m^2$ sind $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(m^2 + \frac{1}{4}p^2)}$. Man kann sie mittelst der oben angegebenen allgemeinen Methode leicht construiren; eleganter ist es aber, dabei wie folgt zu verfahren:

1) Die Gleichung $x^2 - px = -m^2$ läßt sich auch folgendermaßen schreiben: $m^2 = x(p - x)$; mithin ist m die mittlere Proportionale zwischen x und $p - x$. Errichtet man daher (Fig. 17) $AD = m$ senkrecht auf $AB = p$, beschreibt dann über AB als Durchmesser den Halbkreis AEB und zieht DE′ parallel zu AB; so wird die von dem Punkt E oder E′ auf AB gefällte Senkrechte EF oder E′F′ mittlere Proportionale zwischen den Segmenten des Durchmessers sein. Die beiden Wurzeln sind folglich $x = AF$ und $x = AF'$.

Anmerkung. Wenn $AD = m$ größer als $\frac{1}{2}p$ ist, so wird die Gerade DE′ den Kreis nicht mehr treffen, also die Unbekannte nicht bestimmen; in solchem Falle sind auch die Wurzeln unserer Gleichung imaginär.

2) In der Gleichung $x^2 - px = m^2$ ist m die mittlere Proportionale zwischen x und $x - p$. Beschreibt man daher mit dem Halbmesser $AD = \frac{1}{2}p$ (Fig. 18) einen Kreis, legt dann an diesen eine Tangente, deren Länge $AC = m$ ist und zieht endlich durch den Mittelpunkt die Secante CEF, so wird man $x = CE$ und $= -CF$ haben, da $m^2 = CE \times CF$.

3) Hat man $x^2 + px = \pm m^2$, so macht man die nämliche Construction wie in den vorhergehenden Fällen. Die Wurzeln haben blos die Zeichen gewechselt, denn es ist hinreichend x in $-x$ umzuändern, um wieder zu den frühern Gleichungen zu gelangen.

XI. Man soll durch den Punkt A eine Sehne BD (Fig. 15) ziehen, die eine gegebene Länge c hat. Behalten wir die in der

Aufgabe VI gewählte Bezeichnung bei, so wird der Bedingung zufolge noch $r^2 - b^2$ oder $k^2 = x \times AB$ sein; also $k^2 = (c - x)\,x$, da $BA = c - x$ ist.

XII. Eine gerade Linie nach dem äussern und mittlern Verhältniß zu theilen. Es heißt dies so viel, als auf der Linie $AC = a$ (Fig. 18) einen Punkt B dergestalt finden, daß der Abschnitt $BC = x$ die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Linie und dem andern Abschnitt $AB = a - x$ sei. Man hat hiernach $x^2 = a\,(a - x)$, woraus $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}a^2)}$. Die Wurzelgröße ist die Hypothenuse CD des aus den beiden Katheten $AD = \frac{1}{2}a$ und AC $= a$ construirten rechtwinkligen Dreiecks ADC. Man hat also $x = -\frac{1}{2}a + CD$. Wird demnach aus D als Mittelpunkt mit dem Halbmesser AD der Kreis EAF beschrieben, so ist $CE = x$. Man braucht also nur CE von C nach B zu tragen, um die in §. 120 der Geometrie gegebene Auflösung zu erhalten. Was die zweite Wurzel anlangt, so ist sie eigentlich unserm Problem fremd; um dieselbe zu erklären (Algebra §. 16), muß man $-x$ statt x in obiger Gleichung setzen, welche dadurch die Form $x^2 = a\,(a + x)$ erhält, und $x = \frac{1}{2}a + CD = CF$ gibt. Trägt man nun CF von C nach G, so wird CG die mittlere Proportionallinie zwischen GA und CA sein. Die beiden Auflösungen entsprechen jetzt folgender Aufgabe: Auf der unbestimmten Geraden AC einen Punkt B oder G von der Lage zu finden, daß sein Abstand vom Punkt C die mittlere Proportionallinie zwischen seinem Abstande vom Punkt A und der Linie AC sei.

§. 13. Um die Formeln von zwei Dimensionen zu construiren, bringt man sie auf zwei Factoren BH zurück; der eine ist alsdann die Basis, der andere die Höhe eines Rechtecks, dessen Fläche zum Werth den vorgelegten Ausdruck hat. In der Gleichung $x = \sqrt{[cd(a^2 - b^2)]}$ z. B. setzt man $a^2 - b^2 = B^2$, $cd = H^2$, wo B und H leicht zu findende Linien sind, und man erhält $x = BH$, ein bekanntes Rechteck.

Will man aber, daß die gesuchte Fläche ein Parallelogramm oder ein Dreieck u. s. w. sei, so läßt, da die Basis und die Höhe zur Bestimmung dieser Figuren nicht hinreichen, das Problem unzählig viele Auflösungen zu, und wird erst bestimmt, wenn man irgend eine andere Bedingung hinzufügt, einen Winkel z. B., oder das Verhältniß der Seiten rc. als gegeben ansieht.

Um ein dem Kreise, dessen Radius $R = a\sqrt{\frac{m}{n}}$ ist, gleich großes Dreieck zu bilden, nimmt man den Durchmesser 2R als Basis an; die Höhe h ist dann eine dem halben Kreisumfang gleiche Linie, d. h. $h = \pi R = \frac{22}{7} a \sqrt{\frac{m}{n}}$. Diese Werthe werden nach der Figur 16 construirt, und es bleibt nur noch übrig, ein Dreieck zu verzeichnen, dessen einer Winkel nach Belieben angenommen wird.

§. 14. Jede Formel von drei Dimensionen läßt sich auf ein Produkt von drei Factoren, $x = ABC$, reduciren, welche die Dimensionen eines rechtwinkligen Parallelepipeds bezeichnen, dessen Volumen x ist. Man kann auch diesen Ausdruck durch einen Würfel, was man die Cubatur der Körper nennt, durch dreiseitige Pyramiden, Cylinder u. s. w. darstellen. So z. B. kann der Ausdruck

$$\frac{a^8 + b^4c^4 - d^8 - e^3k^5}{f^5 + g^5 + l^4i}$$

einen Körperraum bezeichnen.

Von der Bedeutung der Zeichen der Größen in der algebraischen Geometrie.

§. 15. Zwei Figuren heißen **direkt**, wenn sie nur rücksichtlich der Größe ihrer Stücke sich von einander unterscheiden, welche Stücke übrigens in beiden Figuren in einerlei Ordnung vorkommen. Sind die Größen a, b, c, d... x der ersten Figur durch eine Gleichung $X = o$ mit einander verbunden, so findet solche auf gleiche Weise für die zweite Figur statt. Unterscheiden sich die beiden Figuren aber ausserdem durch die Lage einiger ihrer Stücke von einander, dergestalt, daß man z. B. $x = a - b$ für die erste und $x = b - a$ für die zweite hat, so nennt man solche Figuren **indirekt**. Die Gleichung $X = o$, welche für eine Figur gilt, bedarf zuweilen einiger Modificationen, um auf die andere zu passen. Es handelt sich darum, dies näher zu untersuchen.

Anmerkung. Carnot hat diese Theorie erdacht und in seiner Geometrie der Stellung entwickelt, wo er direkte Correlativen die direkten Figuren und inverse Correlativen die indirekten Figuren nennt. Wir verweisen in dieser Beziehung auf jenes vortreffliche Werk. (Aus dem Französischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen von H. Schumacher.)

Nennt man x den Abschnitt CD (Fig. 7 und Fig. 7a), welchen die auf die Basis AC des Dreiecks ABC herabgelassene Senkrechte BD abschneidet, und a, b, c die den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten; so hat man $BD^2 = c^2 - AD^2 = a^2 - x^2$, woraus $c^2 = a^2 + AD^2 - x^2$ (1). Setzt man anstatt AD seinen Werth $AC - CD = b - x$ (Fig. 7), oder $AC + CD = b + x$ (Fig. 7 a); so kommt $c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$, oder $c^2 = a^2 + b^2 + 2bx$...(2).

Die Figuren (7) und (7 a) sind indirect, weil für die eine $x = b - AD$, und für die andere $x = AD - b$ ist. Von den Formeln (2) ist jede gerade zu nur für eine einzige Figur anwendbar, während die Formel (1) beiden zugleich angehört. Die Substitution des Werthes von AD hat allein diesen Unterschied herbeigeführt, welcher, da er blos von dem Zeichen von x herrührt, zeigt, daß sich durch die Umänderung von x in $-x$ eine der Gleichungen (2) von der andern ableiten lassen muß.

§. 16. Im Allgemeinen, wenn zwischen den Größen a, b, c, d... x, den Stücken zweier indirekten Figuren, die Gleichung $X = o$ für die eine, und $X' = o$ für die andere besteht; so muß es wenigstens eine Linie, z. B. a, geben, welche in der einen Figur die Summe und in der zweiten die Differenz von zwei andern Linien b und x sei, dergestalt, daß $a = b - x$ für die eine, und $a = b + x$ für die andere gelte. Nun kann man sich aber stets eine dritte Gleichung $Y = o$ denken, welche sowohl für die eine als die andere richtig ist, in der Art, daß man $X = o$ oder $X' = o$ daraus ableitet, je nachdem man $b + x$ oder $b - x$ anstatt a setzt. Da diese Werthe von a nur in Hinsicht des Zeichens von x von einander verschieden sind, so müssen X und X′ sich gegenseitig von einander dadurch herleiten lassen, daß x mit $-x$ verwechselt wird. Wären mehrere indirekte Größen vorhanden, so müßte man von einer jeden derselben das Nämliche aussagen.

Wir wollen jetzt die Mittel angeben, woran man dergleichen Größen erkennt. Wenn man die Lage der Punkte der zweiten Figur sich ändern läßt, um sie mit der ersten Figur direkt zu machen; so sieht man bei Vergleichung der beiden Werthe von $x = b - a$ und $a - b$, daß a vorher kleiner als b war, nachher aber größer als b geworden ist, und es muß, da diese Aenderung dem Gesetz der Stetigkeit zufolge vor sich geht, einen Moment gegeben haben, wo $a = b$ war; x muß also Null geworden sein. So z. B. wenn sich der Punkt C (Fig. 7) nach D zu bewegt und an diesem Punkt vorbei geht, um

die Figur mit der Figur 7 a direkt zu machen, wird CD oder x in dem Augenblick Null, in welchem C an D anlangt.

Für die eine Figur kann $x = \frac{K}{a-b}$ und $= \frac{K}{b-a}$ für die andere sein; in diesem Falle ist x durchs Unendliche gegangen. Das Eigenthümliche der indirekten Größen besteht also darin, daß sie durch die stetige Bewegung der Theile der einen nicht direkt gemacht werden können, ohne vorher in dem Zwischenraum Null oder unendlich groß gewesen zu sein.

Hat man also eine Gleichung $X = o$ zwischen den Größen a, b, c... x einer Figur, so braucht man, um die Gleichung $X' = o$, welche der indirekten Figur entspricht, zu erhalten, blos das Zeichen der indirekten Größen zu ändern. Man erkennt die letztern dadurch, daß man die Linien der einer Figur sich bewegen läßt, um solche mit der andern direkt zu machen. Dabei bemerkt man unter den Linien a, b... x diejenigen, welche Null oder unendlich groß werden, diese letztern können allein indirekt sein.

Dieses Merkmal kann sich übrigens auch darbieten, ohne daß deshalb die damit behafteten Linien gerade indirekt sind. Damit solches der Fall ist, müssen ausserdem die Relationen, welche man aus den beiden Figuren mittelst bekannter Sätze ableitet, bei ihrer Vergleichung die indirekten Größen unterscheiden lassen, um ihnen hernach entgegengesetzte Zeichen beizulegen. Auf solche Weise z. B. muß man, nachdem zuvörderst erkannt ist, daß $CD = x$ Null wird (Fig. 7), wenn C mit D zusammenfällt, alsdann die Werthe von CD suchen, welche $AC - AD$ (Fig. 7) und $AD - AC$ (Fig. 7 a) sind, was zeigt, daß x ein verschiedenes Zeichen hat.

§. 17. Wir schreiten zur Anwendung dieser Lehre. Es werde in dem Dreieck ABC (Fig. 19) durch den gegebenen Punkt D eine Gerade DF gezogen, und das Verhältniß α der beiden Dreiecke ABC, AEF gesucht. Man setze $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ und ziehe DI parallel zu AC. Es sei ferner $AI = d$, $DI = f$, $AF = x$. Das Verhältniß α ist gleich $\frac{AE \times AF}{AC \times AB}$ (Geometrie §. 109). Die ähnlichen Dreiecke AEF, DIF geben aber $AE = \frac{fx}{x+d}$, woraus $\alpha bc(x+d) = fx^2$ ... (A).

Diese Gleichung setzt voraus, daß der Punkt D innerhalb des Winkels IAC liegt. Befindet sich der Punkt aber innerhalb des Dreiecks in D′, so erhält man eine zu der vorigen indirecte Figur. Läßt man D nach D′ sich bewegen, so geht DI in D′I′ über, ohne daß weder α, b, c, noch f Null oder unendlich geworden sind. AI in AI′ übergegangen konnte allein indirekt werden, und ist es in der That geworden, weil $AI = IB - AB$ und $AI' = AB - I'B$. Unsere Gleichung gilt demnach für den vorliegenden Fall nur insofern als d in $-$ d umgewandelt wird, mithin $\alpha bc(x-d) = fx^2$.

Wenn der Punkt D′ sich nach D″ begibt, so geht D′I′ durch Null, um die Lage D″I″ zu erhalten. Man versichert sich hierauf, daß D′I′ indirekt ist, und daß f sein Zeichen geändert hat, während α, b, c, d unverändert bleiben; mithin $\alpha bc\ (d - x) = fx^2$. Wird dieser Fall mit dem ersten verglichen, so sieht man, daß er zwei indirecte Größen d und f enthält. Die Linie IF ist es ebenfalls; dies zu berücksichtigen ist aber unnöthig, da sie durch keinen in der Rechnung vorkommenden Buchstaben ausgedrückt wird.

Soll endlich die Gerade DF den Winkel F′AE′ (Fig. 19 a) schneiden, so ist es ersichtlich, daß, bei der Drehung von DF in die Lage DF′, die Linie AF durch Null in AF′ übergeht; man muß demnach in der Gleichung (A) x mit $-$x vertauschen, wodurch sie in die vorhergehende umgeändert wird.

Uebrigens ist es leicht, jeden einzelnen Fall besonders zu behandeln und zu den entsprechenden Gleichungen zu gelangen. Die von uns auseinandergesetzte Theorie ist hauptsächlich dazu bestimmt, die jedesmalige Vornahme der Rechnungen bei den verschiedenen Fällen zu vermeiden und zu zeigen, daß eine der Gleichungen die übrigen sämmtlich in sich begreift, welche durch bloße Zeichenänderungen daraus hergeleitet werden können. Ganz dem Geist der Algebra angemessen schließt also eine Gleichung alle Fälle in sich, man braucht nur die Sprache derselben gehörig zu verstehen und auszulegen, um im Stande zu sein, alle Umstände, welche die Aufgabe darbieten kann, daraus zu entwickeln.

Anmerkung. Nachstehende sehr einfache Aufgabe wird gleichfalls zur Erklärung des Gesagten dienen. Man soll an zwei in einer Ebene liegenden Kreise (Fig. 20) eine gemeinschaftliche Tangente für den Fall ziehen, daß dieselbe die Centrale in ihrer Verlängerung schneidet. Es sei MM′ eine dieser beiden gemeinschaftlichen Tangenten; ferner werde $CM = r$, $C'M' = r'$,

CC′ = c und CF = x gesetzt. Die ähnlichen Dreiecke CMF und C′M′F′ geben die Gleichung $x = \frac{cr}{r-r'}$, woraus folgt, daß x oder CF eine vierte Proportionale zu den Linien r—r′ c und r ist. — Setzen wir den Abstand c der Mittelpunkte und den Radius r des einen Kreises als constant voraus, lassen dagegen aber den Radius r′ des andern Kreises dergestalt sich ändern, daß die Differenz r — r′ immer kleiner wird; so nimmt der Werth von x immer mehr und mehr zu, und wird unendlich, wenn jene Differenz Null ist. Die gemeinschaftliche Tangente MM′ und die Centrale CC′ laufen in diesem Falle zu einander parallel. Lassen wir r′ noch weiter fortwachsen, so daß es größer als r wird, so ist der Werth von x negativ. Diese Umkehrung der Zeichen entspricht einer Umkehrung der Lage der Linien CF. Bei Vergleichung der Dreiecke CMF und C′M′F hatten wir nämlich den Punkt F auf der rechten Seite des Kreises C′M′ liegend angenommen; der algebraische Ausdruck für x entsprach genau dieser Voraussetzung. Durch die Aenderung, welche jetzt aber r′ erlitten, trifft es sich, daß der Punkt F auf der linken Seite des Kreises C′M′ liegt, d. h. auf einer Seite, die dem Resultate der frühern Operation entgegengesetzt ist. Der algebraische Ausdruck konnte also nicht mehr einen unserer ersten Voraussetzung entsprechenden Werth geben. In vorliegendem Fall war demnach eine solche Modifikation nöthig, wodurch die Linie CF eine entgegengesetzte Lage erhielt. Allein bei Aenderung der Lage der Linie CF blieb ihre Beziehung zu dem Radius und dem Abstande der Mittelpunkte im Wesentlichen dieselbe; die allgemeine Formel oder der für sämmtliche Fälle passende Ausdruck deutete durch die Aenderung des Zeichens die Umkehrung, deren die Bedingung der Aufgabe fähig ist, oder, wenn man will, die Modification an, welche man in derselben vornehmen muß, um zu einem positiven Resultate zu gelangen.

§. 18. Da jede Gleichung den Werth eines beliebigen, darin vorkommenden Buchstaben angibt, so kann es sich ereignen, daß gerade dieser Buchstaben es ist, welcher eine Veränderung erleiden mußte, um auf die vorgelegte Figur angewendet werden zu können. Man erhält alsdann einen negativen Werth von der Form x = —k, dessen weitere

Auslegung keine Schwierigkeit hat. In der That, um zu der Gleichung $X = 0$ zu gelangen, wurde das Problem als aufgelöst betrachtet und eine Figur nach dem hypothetischen Zustand der gegebenen und unbekannten Größen construirt. Die erhaltene negative Auflösung zeigt an, daß die vorausgesetzte Figur nicht auf die Aufgabe passen kann, und daß man, bei Bildung der Figur und ihrer Annahme als Basis der gemachten Schlußfolgen, sich widersprechende Bedingungen eingeführt hat. Aendert man jetzt x in $-x$ um, so gehört die Gleichung $X' = 0$ blos der indirekten Figur an; dieser letztern und nicht der angenommenen Figur genügt nun die Auflösung $x = k$. Man muß folglich die Punkte unserer Figur sich bewegen lassen, bis daß $X' = 0$ erfüllt werde, indem man dabei, wohl verstanden, einige Buchstaben Null oder unendlich groß werden läßt. Der auf solche Weise modificirten Figur entspricht alsdann die Auflösung $x = k$.

Wir wollen nun diese Betrachtungen auf verschiedene Beispiele anwenden.

I. Ein Punkt D ausserhalb des Dreiecks ABC (Fig. 19) ist gegeben; man soll die Gerade DF dergestalt ziehen, daß die beiden Dreiecke AEF, ABC in einem gegebenen Verhältniß stehen. Liegt der Punkt D in dem Winkel IAC, so findet man die Gleichung (A) (§. 17), aus der sich zwei Auflösungen ergeben: die eine, positiv, bestimmt den Punkt F, die andere, negativ, bezieht sich auf die Figur 19 a, wo DF′ die Schenkel des Winkels F′AE′ schneidet; es folgt dies aus dem, was für die Fälle, in denen x in $-x$ umgeändert wird, gesagt worden ist.

Anmerkung. Nachstehende Probleme sind von ähnlicher Art:

Von einem gegebenen Dreieck ABC ein Dreieck AEF abzusondern, welches zum erstern in dem bekannten Verhältnisse $m : n$ stehe, und zwar:

1) durch eine aus dem Scheitel gehende Linie (Geometrie §. 101);
2) durch eine aus einem auf der Basis liegenden Punkt gezogene Linie (Geometrie §. 109);
3) durch eine Linie, welche zur Basis parallel läuft (§. 11 Aufgabe VI);
4) durch eine auf der Basis senkrecht stehenden Linie (§. 12 Aufgabe VIII).

Die folgende Aufgabe wird auf die vorher behandelte zurückgeführt: Durch den Punkt D die Linie DF so zu ziehen, daß das in dem Winkel CAB dadurch abgeschnittene Dreieck AEF einem gegebenen Quadrat q^2 gleich sei. Durch eine beliebige Linie BC werde das Dreieck ABC gebildet, dessen Flächeninhalt wir einem bekannten Quadrat r^2 gleich setzen; dabei nehmen wir an, daß $r >$ oder $= q$ ist. Der Bedingung der Aufgabe zufolge sind r und q als gegeben zu betrachten; das Verhältniß α mithin bekannt und gleich $\frac{q^2}{r^2}$.

Anmerkung. Zieht man durch den gegebenen Punkt eine Gerade, welche ein beliebiges Polygon schneidet und dabei ein dem Quadrat t^2 gleiches Flächenstück absondert; so wird, wenn man die beiden durch gedachte Gerade geschnittenen Seiten verlängert, bis sie sich treffen, und das ausserhalb des Polygons in dem dadurch gebildeten Winkel liegende Flächenstück durch A bezeichnet, die von diesem Winkel getrennte Fläche gleich $t^2 + A$ sein. Will man also von einem gegebenen Polygon eine bekannte Fläche t^2 abschneiden, so ist es hinreichend, zwei beliebige Seiten zu verlängern, und von dem dadurch entstandenen Winkel die Fläche gleich t^2 abzusondern. Man stellt auf diese Weise sämmtliche Seiten, je zwei und zwei, gegen einander, um alle Auflösungen zu erhalten, indem man diejenigen ausser Acht läßt, bei welcher die Secante erst die Verlängerung einer der Seiten trifft. Anstatt t^2 zu geben, könnte man auch verlangen, daß das von dem Polygon abgeschnittene Flächenstück zu dem Flächeninhalt des Polygons in dem gegebenen Verhältnisse $m : n$ stehe.

II. Von dem Punkte O, dem Endpunkt des auf einer gegebenen Sehne AD senkrecht stehenden Durchmessers (Fig. 21), eine Gerade OE so zu ziehen, daß das zwischen der Sehne und dem Bogen enthaltene Stück FE eine gegebene Länge m habe. Es sei $AB = a$, $BO = b$, $FE = m$, $OF = x$; wir haben $OF \times FE = AF \times FD$, oder $mx = (a + BF)(a - BF)$. Nun ist $BF^2 = x^2 - b^2$; folglich $mx = a^2 + b^2 - x^2$, woraus $x = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + \frac{1}{4}m^2)}$.

Die positive Auflösung bietet keine Schwierigkeit dar und läßt sich leicht construiren. Um die negative auszulegen, ändern wir x in $-x$ um, wodurch wir erhalten $mx = x^2 - a^2 - b^2 = BF^2 - a^2$; was voraussetzt, daß $BF > a$ oder BD ist. Wir lassen nun OF sich

drehen, bis es nach OF′ gelangt; hierbei ist ersichtlich, daß a, b und x direkt bleiben, FE und FD aber Null werden, wenn OF durch D geht. Ueberdies ist FD = BD — BF und F′D = BF′ — BD; F′D ist folglich indirekt zu FD. Dasselbe gilt von F′E′ = n, denn man hat $FE = \frac{AF \times FD}{FO}$, wo FD indirekt ist. Man findet also die der Linie F′O entsprechende Auflösung dadurch, daß man m in —m, oder was auf eins hinausläuft, x in —x umändert. Die Aufgabe läßt folglich zwei Auflösungen rechts von OB, mithin auch zwei auf der linken Seite zu; die eine Auflösung wird durch die positive Wurzel, die andere durch die negative Wurzel angegeben. Uebrigens könnte die vorgelegte Aufgabe auch keine indirekten Auflösungen zulassen. Es wäre dies der Fall, wenn verlangt würde, daß FE innerhalb und nicht ausserhalb des Kreises liege. Die negativen Auflösungen haben alsdann keine Bedeutung.

Anmerkung. Vorstehendes Beispiel zeigt, daß die Zahl der Auflösungen einer Aufgabe nicht immer durch den Grad der Unbekannten angegeben wird. Um keine Auflösung zu vernachläßigen, muß man die Figur sich ändern lassen und sie mit allen indirekten zusammenstellen, wobei die gegebenen Größen unveränderlich bleiben.

III. Welches Kugelsegment GADI (Fig. 22) ist dem Volumen nach dem Kegel CDIG gleich? Man hat (Geometrie §. 159) Kugelausschnitt $DAG = \frac{2}{3}\pi r^2 h$, wenn AI = h gesetzt wird. Ferner Kegel $CDGI = \frac{1}{3}CI \times$ Kreis $DI = \frac{1}{3}(r-h)\pi k^2$, wenn man DI = k macht. Die vorgeschriebene Bedingung verlangt, daß der Kegel die Hälfte des Kugelausschnitts beträgt, d. h. $(r-h)k^2 = r^2 h$. Nun ist DI mittlere Proportionale zwischen den Segmenten des Durchmessers, oder $k^2 = h\,(2r-h)$; folglich $(2r-h)\,(r-h) = r^2$, oder $h^2 - 3rh + r^2 = o$, woraus $h = \frac{1}{2}r(3 \pm \sqrt{5})$. Die Auflösung, welche dem $+\sqrt{5}$ entspricht, hat keine Bedeutung, weil offenbar $h < 2r$ sein muß.

§. 19. Es gibt eine Gattung von Problemen, welche auf die vorhergehende Theorie Bezug haben und verdienen, daß wir einige Zeit bei ihnen verweilen. Man nehme an, daß auf einer bestimmten Linie (Fig. 23) ein Punkt B gegebenen Bedingungen zufolge gefunden werden solle. Man wählt deshalb einen willkührlichen Punkt A, den man den Anfangspunkt oder Ursprung nennt, und sucht den

Abstand AB = x zwischen diesen beiden Punkten. Es kann sich dann ereignen, daß die Gleichung X = o, welche die Bedingungen der Aufgabe enthält, eine negative Auflösung x = — a zuläßt; es handelt sich nun darum, dieses Resultat zu erklären.

Man hat gesehen, daß x = a der vorgelegten Aufgabe genügt, wenn man annimmt, daß x daselbst indirekt werde. Bewegt sich nun aber der Punkt B nach C, um nach B′ zu kommen, so wird AB Null, wenn B auf A fällt; hierauf wird AB indirekt, weil AB = CB — CA, und AB′ = CA — CB′. Wenn also nichts in der Aufgabe anzeigt, daß der gesuchte Punkt auf der rechten Seite des Ursprungs A gelegen sei, so ist es klar, das der Abstand x = a, von A nach B′, d. h. auf die linke Seite, getragen, der Aufgabe Genüge thue. Man sieht sogar, daß die negative Auflösung x = — a in der Gleichung X = o eine Ungereimtheit andeutet, welche daher kommt, daß man bei Erhaltung dieser Gleichung den gesuchten Punkt rechts vom Ursprung in B liegend angenommen hat, eine Lage, welche sich mit dem Zustand der Aufgabe in Widerspruch befindet, weil dadurch die hypothetische Figur, aus der die Gleichung X = o abgeleitet wurde, eine zu ihrer wirklichen indirekt stehende Form erhielt. Dieser Irrthum wird berichtigt, indem man den Punkt B auf die linke Seite von A nach B′ hinzu trägt.

§. 20. Hieraus folgern wir, **wenn es der Zweck der Aufgabe ist, den Abstand eines unbekannten Punktes vom Ursprung zu finden, daß man jedesmal das Zeichen der aus der Rechnung sich ergebenden negativen Auflösungen zu unterdrücken und die Werthe in einem Sinn zu nehmen hat, der demjenigen entgegengesetzt ist, in welchem sie, um die Gleichung zu erlangen, genommen wurden.** Man konnte diese Bemerkung schon in der Aufgabe III §. 11 machen, wo die Unbekannte GI (Fig. 12) von G nach I′ getragen wurde. Ebenso in der Aufgabe IV, wo man CD′ = CD (Fig. 13) nahm und in D′ einen zweiten Berührungspunkt des gesuchten Kreises mit der Geraden DD′ erhielt. Wir lösen noch folgende Aufgabe:

IV. Auf einer Linie AC (Fig. 23) einen Punkt B′ zu finden, dessen Abstände von den festen Punkten A und C ein gegebenes Produkt m^2 bilden. Es sei AC = a, CB′ = x; man hat AB′ = a — x, woraus $x(a-x) = m^2$ und $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - m^2)}$. Es ist leicht,

diese doppelte Auflösung zu construiren. Wenn $m > \frac{1}{2}a$ ist, so wird x imaginär; man darf aber hieraus noch nicht schließen, daß die Aufgabe eine Ungereimtheit enthalte. Denn der Irrthum kann dadurch entstanden sein, daß man dem gesuchten Punkt B′ eine Lage beigelegt hat, die ihm nicht zukommt. Versetzen wir ihn daher nach B, ausserhalb des Raumes AC, so haben wir $CB = x$ und $AB = x - a$; $x(x-a) = m^2$ und $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2+m^2)}$. Hieraus folgt:

1) Daß die Aufgabe niemals ungereimt ist, wenn sie zur Bedingung macht, daß der verlangte Punkt ausserhalb AC liegt. Die beiden Auflösungen sind, die eine der Punkt B, die andere der Punkt E; die erste rührt von der positiven Wurzel, die zweite von der negativen Wurzel $EC = AB$ her.

2) Verlangt aber die Aufgabe, daß der Punkt zwischen A und C liegt, so ist sie absurd, wenn $\frac{1}{2}AC$ von m übertroffen wird, d. h. das größte Rechteck, welches man aus den zwei Theilen einer Linie AC construiren kann, ist das mit ihrer Hälfte verzeichnete Quadrat (siehe Algebra §. 6). Vor allen Dingen verdient bemerkt zu werden, daß die durch das imaginäre Symbol angedeutete Absurdität gerade durch einen in Bezug auf die Lage des Punktes B gemachten Fehler herrührt, welcher demjenigen analog ist, der gewöhnlich zu den negativen Auflösungen führt. Es setzt dies die so eben entwickelte Theorie noch mehr ins Licht.

3) Wenn die Aufgabe gestattet, den gesuchten Punkt zwischen A und C, oder ausserhalb dieses Raumes zu legen, so läßt sie zwei oder vier Auflösungen zu, je nachdem $\frac{1}{2}a <$ oder $>$ m ist. In dem letztern Fall wird die Zahl der Auflösungen nicht durch die Hülfe der Algebra allein bestimmt, oder vielmehr die Algebra gibt in der That Alles, was sie geben soll, indem sie nur das liefert, was in sie übertragen wurde. Das Problem II im vorletzten Paragraphen befindet sich in demselben Falle.

§. 21. In jeder geometrischen Aufgabe sind also, wie man sieht, zwei Dinge zu bemerken:

1) Jede Gleichung ist nur für die Figur wahr, aus welcher sie abgeleitet wurde, und auf solche muß sie stets bezogen werden. Eine Aenderung in den Zeichen gewisser Buchstaben, welche gegebene Größen darstellen, ist aber vorzunehmen, wenn man die Gleichung auf eine zu der frühern Figur indirekten Figur anwenden will.

2) Erhält man für die Unbekannte x einen negativen Werth, so

ist die Gleichung, aus der sie abgeleitet wurde, fehlerhaft, insofern man sie auf die direkte Figur anwendet. Man muß alsdann die Zusammenstellung der Stücke ändern, um für x einen positiven Werth herbei zu führen. Wäre z. B. die Länge x auf einer festen Linie zu nehmen, so müßte jene in einer Richtung aufgetragen werden, die derjenigen entgegengesetzt ist, welche man vorausgesetzt hatte.

Von der Methode der Coordinaten.

§. 22. Um die Lage eines Punktes M in einer Ebene zu bestimmen, befolgt man gewöhnlich folgende Methode. Man nimmt beliebig zwei sich schneidende Linien Ax, Ay (Fig. 33) an, und zieht durch den Punkt M zwei mit jenen Linien parallele Gerade MQ, MP. Man nennt das Stück MQ = AP = x die Abscisse, das Stück MP = AQ = y die Ordinate des Punktes M. Sind diese beiden Stücke gegeben, so wird man die Lage des Punktes M kennen, indem man blos durch P und Q mit den Linien Ay, Ax zwei Parallelen PM und QM zu ziehen braucht, deren Durchschnitt der zu bestimmende Punkt ist. Hat man y = o, so liegt der Punkt auf der Linie Ax; dagegen liegt derselbe auf der Linie Ay, wenn x = o; für den Punkt A endlich ist x und y zugleich Null. Die Linien Ax und Ay werden die Achsen oder auch Coordinatenachsen genannt, der Punkt A ist der Anfang oder Ursprung, x und y sind die Coordinaten des Punktes M.

Es ist zwar wahr, daß nichts von vornherein sagt, ob der Punkt eher in dem Winkel yAx, als in den Winkeln yAx′, y′Ax, oder y′Ax′ gelegen ist. In der That hätte man x nach AP′ und ebenso y nach AQ′ tragen können, wodurch die vier Punkte M, N, M′, N′ den gegebenen Bedingungen genügen; es bleibt also unentschieden, welcher von diesen vier Punkten zu nehmen ist. Allein aus dem oben Gesagten ergibt sich:

1) Wenn die Lage des Punkts unbekannt ist, so gibt die Rechnung seine Coordinaten; die vor denselben stehenden Zeichen geben an, in welchem der vier Winkel der fragliche Punkt zu suchen ist. Wir nehmen in der Folge an, daß die auf der rechten Seite von A liegenden x positiv, und die oberhalb A liegenden y positiv sind. Hiernach hat man für die Punkte

des Winkels yAx, wie M, x und y positiv;

des Winkels yAx', wie N, x negativ und y positiv;
des Winkels $y'Ax$, wie M', x positiv und y negativ;
des Winkels $x'Ay'$, wie N', x und y negativ.

2) Wenn der Punkt gegeben ist, so braucht die aus der angenommenen Lage hergeleitete Gleichung nur in Bezug auf gewisse Zeichen modificirt zu werden, insofern man die Lage dieses Punktes ändern wollte. Man nimmt gewöhnlich den beliebig gegebenen Punkt M in dem Winkel yAx an, wodurch die Nothwendigkeit vermieden wird, die einer Gleichung entsprechende Figur jedesmal beizubehalten, aus der jene Gleichung gebildet wurde, und zugleich diese Figur sich von selbst darbietet. Man unterscheidet dann leicht, wenn es sich darum handelt, die Formel auf einen besondern Fall anzuwenden, und ob es nöthig ist, daß die Coordinaten x und y irgend eines Punktes geändert werden.

Der Winkel der Coordinaten ist am häufigsten ein rechter; die Linien x und y stehen alsdann senkrecht auf den Achsen und sind die Entfernungen des Punktes M von denselben, was die meiste Leichtigkeit im Ausdruck und Einfachheit in den Constructionen darbietet.

Anmerkung. In dem Fall, daß der Coordinatenwinkel ein rechter ist, heißt das Coordinaten-System ein rechtwinkliges, sonst schiefwinkliges. Uebrigens lassen sich ausser diesen beiden Coordinatensystemen noch andere denken, um die Lage eines Punktes in einer Ebene zu bestimmen.

Zweites Kapitel.

Ebene Trigonometrie.

Von dem Sinus, Cosinus, der Tangente, Cotangente u. s. w.

§. 23. Bis jetzt haben wir die Unbekannten eher durch Linien als durch Zahlen auszudrücken gesucht. Man sieht aber bald, daß die Genauigkeit der geometrischen Auflösungen durch die Vollkommenheit der Instrumente und die Geschicklichkeit, mit welcher solche

gehandhabt werden, bedingt ist, daß mithin der Gebrauch der Rechnung den Vorzug verdient, wann es gilt, jeden beliebigen Grad von Schärfe zu erreichen. Da sich aber alle geradlinigen Figuren in Dreiecke zerlegen lassen, so kommen die verwickeltesten geometrischen Operationen zuletzt immer auf Auflösungen von Dreiecken zurück, d. h. auf die Bestimmung des numerischen Werthes der verschiedenen ihnen angehörigen Stücke. Dergleichen Rechnungen kennen zu lernen, ist Zweck und Gegenstand der ebenen Trigonometrie.

Zuvörderst ist es nothwendig, Gleichungen aufzufinden, durch welche die Winkel und Seiten eines Dreiecks in eine solche Verbindung gesetzt werden, damit, wenn einige dieser Stücke gegeben sind, man die übrigen daraus herzuleiten vermag. Die Einführung der Winkel erfordert jedoch einige Vorsicht, weil sie mit den Linien nicht auf eine und dieselbe Einheit bezogen werden können. Man bemerkt aber bald, daß der Winkel BCA (Fig. 25) bestimmt sein würde, wenn die Lage eines beliebigen Punktes des Schenkels BC in Bezug auf den Schenkel AC bekannt wäre. Beschreiben wir also aus dem Scheitel C mit einem beliebigen Radius CK den Bogen KG, so werden die rechtwinkligen Coordinaten CI, IK den Punkt K, folglich auch den Winkel C bestimmen: eine dieser Linien reicht selbst schon hin, weil der Radius bekannt ist.

Die Abscisse CD (Fig. 24) eines beliebigen Punktes B des Umkreises heißt der Cosinus des Bogens AB, die Ordinate BD der Sinus desselben. Man definirt diese Linien auch folgendermaßen: Der Sinus eines Bogens ist die Senkrechte, welche man von einem Endpunkt desselben auf den Halbmesser fällt, der durch den andern Endpunkt geht; der Cosinus ist die Entfernung des Fußpunktes des Sinus vom Mittelpunkt.

§. 24. Hätte man auf CA (Fig. 25) die Senkrechte HG, mithin eine Tangente durch den Punkt G des Bogens GK gezogen, so würde eine der Längen GH und CH den Winkel C und den Bogen KG gleichfalls bestimmt haben. Man nennt HG die Tangente und CH die Secante dieses Bogens; es sind dies nicht mehr wie in der Elementar-Geometrie unbegrenzte gerade Linien. Die Tangente AT eines Bogens AB (Fig. 24) ist dasjenige Stück der durch einen Endpunkt desselben gelegten Berührungs-

linie, welches von den beiden ihn begrenzenden Halbmessern eingeschlossen wird; der bis zur Tangente verlängerte Halbmesser CT heißt Secante.

Sobald der Bogen EB, das Complement von AB, bekannt ist, so ist es auch AB; man kann folglich die Größe eines Bogens AB als bestimmt ansehen, wenn man den Sinus GB, die Tangente EM, oder die Secante CM seines Complements angibt. Man versteht deshalb unter Cosinus, Cotangente und Cosecante des Bogens AB den Sinus, die Tangente und Secante seines Complements.

§. 25. Ist der Radius gegeben, so hängt die Größe eines Winkels oder Bogens von der seines Sinus oder Cosinus, seiner Tangente, Secante, Cotangente oder Cosecante ab, welche man durch sin, cos, tang, sec, cot, cosec bezeichnet. Wir können also die Bogen und Winkel in die Rechnung einführen, indem wir uns der nämlichen Einheit wie für die geraden Linien bedienen, was unser Zweck war. Bevor wir jedoch von diesen Betrachtungen Gebrauch machen, wollen wir die trigonometrischen Linien mit einander vergleichen und gegenseitige Beziehungen zwischen ihnen auffinden; denn es ist einleuchtend, daß, wenn eine bekannt ist, die übrigen davon abhängig sind.

Anmerkung. Die trigonometrischen Linien heißen auch Kreisfunktionen oder goniometrische Linien. Einige Mathematiker nennen die Lehre von den trigonometrischen Linien für sich betrachtet die Goniometrie, indem sie den Namen Trigonometrie blos dem Theil der Wissenschaft, welcher mit der Berechnung der Dreiecke zu thun hat, und den Namen Polygonometrie dem Theil, der sich mit der Berechnung der Vielecke beschäftigt, beilegen. Uebrigens pflegt man diese drei Theile zusammen, nämlich die Goniometrie, Trigonometrie und Polygonometrie mit dem gemeinschaftlichen Namen Trigonometrie zu benennen.

Das rechtwinklige Dreieck BCD (Fig. 24) gibt $CD^2 + BD^2 = CB^2$; CD ist aber der Cosinus, DB der Sinus des Bogens $AB = a$, und CB der Radius R; folglich $\sin^2 a + \cos^2 a = R^2$.... (1).

Anmerkung. Der Ausdruck $\sin^2 a$ so viel als $(\sin a)^2$ bedeutet das Quadrat des Sinus eines Bogens, und ist nicht mit dem Sinus des Quadrats des Bogens a oder $\sin(a)^2$ zu verwechseln. Ebendies gilt von den übrigen trigonometrischen Linien.

Das rechtwinklige Dreieck CAT gibt $CT^2 = CA^2 + AT^2$, d. h. $\sec^2 a = \tang^2 a + R^2 \ldots (2)$.

Die ähnlichen Dreiecke CBD, CTA geben

$$\frac{CD}{BD} = \frac{CA}{AT} \text{ und } \frac{CD}{CA} = \frac{CB}{CT}, \text{ oder}$$

$$\tang = \frac{R \sin a}{\cos a} \ldots (3), \text{ und}$$

$$\text{Sec } a = \frac{R^2}{\cos a} \ldots (4).$$

Die letzte Formel zeigt, daß der Radius die mittlere Proportionallinie zwischen dem Cosinus und der Secante ist. Uebrigens ist die vierte Gleichung eine Folgerung aus den drei erstern, die hinreichend sind, die Rechtwinkligkeit und Aehnlichkeit der Dreiecke CBD, CTA auszudrücken. Man darf also diese vier aufgestellten Relationen nicht als von einander verschieden betrachten, da sie eigentlich nur so viel wie drei gelten. Man kann sich überdies von vornherein davon überzeugen, indem man eine aus den übrigen durch Elimination ableitet.

§. 26. Dieselben Formeln finden ebenfalls zwischen dem Sinus, dem Cosinus, der Tangente und Secante des Bogens EB, des Complements von AB, statt. Wir dürfen folglich in unsern Formeln den Sinus in Cosinus, die Tangente in Cotangente u. s. w. umändern. Uebrigens geben die ähnlichen Dreiecke CBD (oder CBG) und CME gerade zu diese neuen Relationen, nämlich $\frac{CG}{CE} = \frac{GB}{EM}$ und $\frac{CG}{CB} = \frac{CE}{CM}$; oder $\cot a = \frac{R \cos a}{\sin a} \ldots (5)$ und $\text{cosec } a = \frac{R^2}{\sin a} \ldots (6)$.

Multiplicirt man die Formeln (3) und (5), oder vergleicht man die beiden Dreiecke CTA und CME mit einander, so findet man, daß der Radius die mittlere Proportionallinie zwischen der Tangente und Cotangente ist, oder $\tang a \times \cot a = R^2 \ldots (7)$. Endlich gibt das rechtwinkliche Dreieck CME uns $CM^2 = CE^2 + EM^2$, oder $\text{cosec}^2 a = R^2 + \cot^2 a \ldots (8)$.

§. 27. Die vorstehenden acht Gleichungen, welche sich eigentlich auf fünf reduciren, dienen dazu, die Größen sin a, cos a, tang a, cot a, sec a, cosec a, zu finden, sobald eine von ihnen bekannt ist. Eine einfache Eliminationsrechnung führt zum Ziel. So z. B. gibt die

Gleichung (1) den Sinus, wenn der Cosinus bekannt ist, und umgekehrt; denn es ist $\sin a = \sqrt{(R^2 - \cos^2 a)}$ und $\cos a = \sqrt{(R^2 - \sin^2 a)}$. Ebenso gibt die Gleichung (2) die Tangente, wenn man die Secante kennt, u. s. w.

§. 28. Von diesen Verbindungen wollen wir die folgende wegen ihres Nutzens hervorheben: nämlich den Cosinus durch die Tangente auszudrücken. Aus der Gleichung (4) zieht man $\cos a = \frac{R^2}{\sec a}$; hieraus folgt, da die Gleichung (2) $\sec a = \sqrt{(R^2 + \tang^2 a)}$ gibt, daß $\cos a = \frac{R^2}{\sqrt{(R^2 + \tang^2 a)}}$ .... (9). Endlich gibt die Gleichung (3) $R \sin a = \cos a \times \tang a$, woraus $\sin a = \frac{R \cdot \tang a}{\sqrt{(R^2 + \tang^2 a)}}$ ... (10).

Man nennt AD den Sinusversus des Bogens AB; hieraus $\sinv a = R - \cos a$.

Der Sinusversus des Bogens EB heißt der Cosinusversus des Bogens BA; hieraus $\cosv a = R - \sin a$.

Die beiden letztgenannten trigonometrischen Linien kommen in der Trigonometrie höchst selten vor.

§. 29. Unter $\sin a$, $\cos a$... muß man den Sinus, Cosinus... eines Bogens, dessen Länge a ist, verstehen, indem der Radius als bestimmt und gleich R angesehen wird. Nun hängt diese Länge von dem Verhältniß des Bogens a zu dem Quadranten ab, und es scheint deren Bestimmung eine besondere Rechnung zu erfordern. Bei dem Gebrauch der Bogen als Maße der Winkel ist aber der Radius ganz willkührlich; ferner sind die ähnlichen Bogen ihren Radien proportional, mithin ist es nicht mehr die absolute Länge a des Bogens, welche in den Rechnungen vorkommt, sondern sein Verhältniß zu dem Radius. Die Sinus ähnlicher Bogen wachsen gleichfalls den Radien proportional, weil man (Fig. 25) offenbar hat $\frac{KI}{CK} = \frac{BA}{CB}$. Das Verhältniß des Sinus zum Radius heißt der natürliche Sinus, sein Werth entspricht dem Sinus des ähnlichen Bogens in dem Kreise, dessen Radius die Längeneinheit ist, weil $\sin a$ und $\frac{\sin a}{R}$ alsdann gleichgeltende Größen sind. Hieraus folgern wir:

1) Wenn der Radius willkührlich ist, was am häufigsten der Fall sein wird, so setzen wir, um die Formeln zu vereinfachen, $R = 1$.

Hiernach $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, $\tang^2 a + 1 = \sec^2 a$, $\cot a \cdot \tang a = 1$, $\tang a = \frac{\sin a}{\cos a}$, $\sec a = \frac{1}{\cos a}$, $\cot = \frac{\cos a}{\sin a}$ u. s. w.

2) Die Annahme $R = 1$ macht die Rechnungen nur für diejenigen Fälle geeignet, in denen der Radius willkührlich ist. Will man dagegen die Formeln verallgemeinern und dem Zustand, wo der Radius R bestimmt ist, anpassen; so setzt man $\frac{\sin a}{R}$, $\frac{\cos a}{R}$.... anstatt $\sin a$, $\cos a$..., oder vielmehr man vertheilt angemessene Potenzen von R in der Art, daß die Homogenität wieder hergestellt wird (§. 4).

3) Kennt man den numerischen Werth $\sin a$ des Sinus eines Bogens für den Halbmesser R, so erhält man den Werth des Sinus des ähnlichen Bogens für den Halbmesser R′, wenn man mit dem Verhältniß des zweiten Radius zu dem erstern multiplicirt; denn $\frac{\sin a}{R} = \frac{\sin a'}{R'}$ gibt $\sin a' = \frac{R'}{R} \times \sin a$.

Anmerkung. Da sämmtliche trigonometrische Linien, die zu einerlei Winkel gehören, sich wie die Halbmesser der Kreise, in welchen sie gezogen werden, verhalten; so erhält man, wenn die trigonometrischen Linien für einen Halbmesser berechnet sind, überhaupt eine beliebige trigonometrische Linie für einen andern Halbmesser dadurch, daß man die gleichnamige trigonometrische Linie des ersten Systems mit dem Verhältnisse der beiden Halbmesser multiplicirt.

4) Bei dem Maß der Winkel gebraucht man nicht die absolute Länge der Bogen, sondern ihr Verhältniß zu dem Quadranten. Auf solche Weise versteht man unter $\sin a$ den Sinus eines Bogens, dessen Zahl der Grade a bedeutet.

§. 30. Es sei a die Länge eines Bogens für den Radius R, (a^0) sein Ausdruck in Graden und Decimaltheilen, oder (a') in Minuten, oder (a'') in Secunden; es handelt sich darum, Relationen zwischen diesen Größen aufzusuchen. Ist der Radius gleich der Längeneinheit, so beträgt die Länge der halben Kreisperipherie $\pi = 3{,}1415926536$, $\log. \pi = 0{,}4971498727$; π also die Länge von 180^0 oder $10800'$ oder von $648000''$. Folglich $\pi(a^0) = 180 \cdot \frac{a}{R}$; $\pi(a') = 10800 \cdot \frac{a}{R}$; $\pi(a'')$

$= 648000 \cdot \frac{a}{R}$. Wird durch π dividirt, und $\mu = 57^0{,}29578$, $\mu' = 3437'{,}746$, $\mu'' = 206264''{,}8$ gesetzt; so erhält man $R(a^0) = \mu a$, $R(a') = \mu' a$, $R(a'') = \mu'' a$.

Mittelst dieser Gleichungen wird aus der in einem Kreisbogen für den Radius R enthaltenen Anzahl von Graden, Minuten, Secunden die Länge dieses Kreisbogens gefunden, und umgekehrt. Setzt man $a = R$, so kommt $(a^0) = \mu$; μ ist folglich die Anzahl der Grade des dem Radius gleichen Bogens; μ' oder μ'' die Zahl der Minuten oder Secunden dieses Bogens. Legen wir demnach den Radius um die Kreisperipherie, so umspannt er auf derselben eine Länge von (a^0) Graden, oder von (a') Minuten, oder von (a'') Secunden. Nehmen wir jetzt einen Bogen von einem Grad oder $(a^0) = 1$, so erhalten wir, wenn $R = 1$ ist: $\mu = \frac{1}{\text{arc } 1^0}$; $\mu' = \frac{1}{\text{arc } 1'} = \frac{1}{\sin 1'}$; $\mu'' = \frac{1}{\text{arc } 1''} = \frac{1}{\sin 1''}$; weil man nämlich anstatt der sehr kleinen Bogen 1′ und 1″ ohne merklichen Fehler ihre Sinus setzen kann. Will man daher anstatt des in einem algebraischen Ausdruck vorkommenden, durch seine Länge a für den Halbmesser 1 bestimmten Kreisbogens die Zahl seiner Secunden (a'') einführen; so reicht es hin, $(a'') \sin 1''$ für a zu setzen; dagegen $(a') \sin 1'$, insofern der Bogen durch Minuten ausgedrückt werden soll.

Man findet:

log. μ = 1,7581226324, Compl. = 0,2418773676 − 2;
log. μ' = 3,5362738828, Compl. = 0,4637261172 − 4 = log. sin 1′;
log. μ'' = 5,3144251332, Compl. = 0,6855748668 − 6 = log. sin 1″;

§. 31. Bis hierher war der Bogen AB kleiner als der Quadrant (Fig. 24); wir wollen nun den Punkt B von A nach EHA′K... sich fortbewegen und ihn den ganzen Umkreis durchlaufen lassen und den Veränderungen nachgehen, welche der Sinus und Cosinus dadurch erleiden. In a ist der Sinus Null, der Cosinus = R. Je größer der Bogen AB wird, desto größer wird der entsprechende Sinus, desto kleiner aber der Cosinus. Gelangt der Punkt B nach E, so ist $\sin \frac{\pi}{2} = R$ und $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Anmerkung. Der Sinus des Quadranten wird auch Sinus totus genannt, weil alle übrigen Sinus Theile desselben sind.

Der Bogen, der mehr als 45 Grade der Sexagesimaleintheilung enthält, wie z. B. 53^0, hat zum Complement 37^0; der Sinus des einen ist der Cosinus des andern. Hat man also die Sinus und Cosinus bis auf 45^0 tabellarisch geordnet, so ist die Columne des Cosinus zugleich auch die der Sinus der Complementbogen, welche 45^0 übertreffen; in den Tafeln sind diese Complemente gehörig angegeben.

Setzt der Punkt B seine Bewegung über E hinaus fort, so nimmt der Sinus ab, der Cosinus dagegen zu. Für den Bogen AEH hat man $HI = BD$, d. h. Supplementwinkel haben einerlei Sinus. Da $IC = CD$ ist, so gilt das Nämliche für den Cosinus, mit dem Unterschied, daß für den Bogen, der größer als der Quadrant ist, der Cosinus negativ wird (§. 22). Für die halbe Kreisperipherie AEA′ ist der Sinus $= 0$, der Cosinus $= - R$.

Wir sehen hieraus, daß, wenn der Bogen größer als 90^0 wird, die Sinus und Cosinus rücksichtlich der Größe wieder zum Vorschein kommen. Für 137^0 z. B. ist der Sinus einerlei mit dem von 43^0, der das Supplement des erstern ist. Man kann selbst den ihm gleichgeltenden Cosinus von 47^0 dafür nehmen; hiernach $\sin 137^0 = \sin 43^0 = \cos 47^0$. Man sieht, daß es hinreicht, 90 in der Stelle der Zehner abzuziehen und den Sinus in Cosinus umzuändern, wenn der Bogen größer als 90^0 ist. Diese Bemerkung ist namentlich von Nutzen, wenn der Bogen Minuten und Secunden enthält; man hat dann ebenso $\cos 137^0\, 17'\, 32'' = - \sin 47^0 17' 32''$.

Was die übrigen trigonometrischen Linien anlangt, so kann man auf ähnliche Weise auf der Figur ihren Aenderungen und Zeichen nachgehen. Es ist jedoch vortheilhafter in dieser Beziehung zu den Formeln 3, 4, 5, 6 seine Zuflucht zu nehmen, da man die Größe und Zeichen der Sinus und Cosinus kennt. Nimmt man die verschiedenen Resultate zusammen, so wird man einsehen, daß $\sin o = o$, $\cos o = R$ geben $\operatorname{tang} o = o$, $\sec o = R$, $\cot = \infty$; $\sin \frac{\pi}{2} = R$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ geben ferner $\operatorname{tang} \frac{\pi}{2} = \infty$, $\sec \frac{\pi}{2} = \infty$, $\cot \frac{\pi}{2} = 0$. Im ersten Quadranten wächst mit dem Bogen a zugleich $\operatorname{tang} a$ und $\sec a$, $\cot a$ wird dagegen kleiner. Im zweiten Quadranten, wo $\sin a$ positiv ist, nehmen mit dem Bogen a auch $\operatorname{tang} a$ und $\sec a$ ab, $\cos a$ dagegen zu; überdem sind hier $\operatorname{tang} a$ und $\cot a$ negativ. Wie oben sieht man, daß $\operatorname{tang} 137^0 = - \cot 47^0$, $\cot 137^0 = - \operatorname{tang} 47^0$ ist.

In den beiden andern Quadranten erhalten die Sinus und Cosinus dieselben Werthe wieder, und man sieht, daß jeder Bogen, der größer als der Quadrant ist, einerlei Sinus, Cosinus, Tangente... mit demjenigen Bogen hat, welchen man findet, wenn man 180^0, so oft es geht, in Abzug bringt. Nur muß man dabei auf die Zeichen gehörige Rücksicht nehmen; die Zeichen der Sinus und Cosinus sind bekannt und dienen dazu, die der übrigen Linien zu bestimmen. So ist $\sin 257^0 = -\sin 77^0$, $\tan 643^0 = \tan 103^0 = -\cot 13^0$. Aus dem Vorhergehenden ergeben sich leicht folgende Sätze:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos a,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\sin a,\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\cot a.$$

$$\sin(\pi+a)=-\sin a,\ \cos(\pi+a)=-\cos a,\ \tan(\pi+a)=\tan a.$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\cos a,\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=\sin a,\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\cot a.$$

Ist der Bogen größer als 4 Quadranten oder 360^0, so muß man davon zuvörderst sämmtliche Umkreise abziehen. Man sieht jetzt den Grund ein, warum die Sinustafeln sich nicht über den Quadranten, selbst nicht über den halben Quadranten hinaus erstrecken.

§. 32. Wenn der Bogen bestimmt ist, so ist es auch sein Sinus, Cosinus, seine Tangente....; das Umgekehrte hat aber nicht statt. So z. B. gehört der Sinus BD (Fig. 24) nicht blos dem Bogen AB, sondern auch seinem Supplement AH an, und ausserdem diesen um eine beliebige Anzahl von Umkreisen vermehrten Bogen AB und AH. Alle diese Bogen geben nur zwei einander entsprechende Supplementwinkel. Man wird also zwei Winkel als Auflösung erhalten, jedesmal wenn die Rechnung den Sinus oder Cosinus... angibt. Sobald ein solcher Fall eintritt, ist es hernach nur nöthig, diejenige Auflösung, welche der Aufgabe nicht genügt, ausser Acht zu lassen.

§. 33. Betrachtet man den Bogen AF als ein entgegengesetztes Zeichen von AB habend, so ist ersichtlich, daß $\sin(-a) = -\sin a$, $\cos(-a) = \cos a$, $\tan(-a) = -\tan a$ ...

Allgemeine Formeln.

§. 34. Die Auflösung der Dreiecke ist in einer schicklichen Anzahl von Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln enthalten. Mit dieser Untersuchung wollen wir uns jetzt beschäftigen. Verlängert

man BD (Fig. 24), so hat man $BD = \frac{1}{2}BF$; der Sinus eines Bogens ist also die Hälfte der Sehne eines doppelten Bogens. Macht man die Sehne BF gleich dem Radius, so ist solche die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks, mithin BAF der sechste Theil des Kreisumfanges und BA der dritte Theil von AE. Der Sinus eines Drittels des Quadranten ist also der Hälfte des Halbmessers gleich. Die Formeln (1), (3) und (5) geben

$\sin 30^0 = \frac{1}{2}R$, $\cos 30^0 = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$, $\operatorname{tang} 30^0 = \frac{R}{\sqrt{3}}$; $\cot 30^0 = R\sqrt{3}$.

Auch kennt man $\sin 60^0$, weil $\cos 30^0 = \sin 60^0$; hieraus $\sin 60^0 = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}R$, $\operatorname{tang} 60^0 = R\sqrt{3}$, $\cot 60^0 = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

§. 35. Beträgt AB (Fig. 24) 45^0 oder die Hälfte von AE, so ist das Dreieck CTA gleichschenklig; mithin $AT = AC$, oder $\operatorname{tang} 45^0 = R$. Folglich $\operatorname{tang} 45^0 = \cot 45^0 = R$, $\cos 45^0 = \frac{1}{2}R\sqrt{2} = \sin 45^0$; $\operatorname{tang} 135^0 = -R = \cot 135^0$, $\sin 135^0 = \frac{1}{2}R\sqrt{2} = -\cos 135^0$.

§. 36. Es sei CAB (Fig. 25) ein in A rechtwinkliges Dreieck. Aus dem Scheitel C eines der spitzen Winkel beschreibe man mit dem Halbmesser $CK = 1$ den Bogen KG, und ziehe ferner den Sinus KI und die Tangente HG. Die ähnlichen Dreiecke CKI, CHG, CAB geben $\frac{CK}{CI} = \frac{CB}{CA}$, $\frac{CK}{KI} = \frac{CB}{AB}$ und $\frac{CG}{GH} = \frac{CA}{AB}$; hieraus $CA = CB \times \cos C$, $AB = CB \times \sin C$ und $AB = CA \times \operatorname{tang} C$. Die letzte ist der Quotient der zweiten dividirt durch die erste. Eine Kathete ist folglich dem Produkt der Hypothenuse mit dem Cosinus des zwischen ihnen liegenden Winkels gleich (A). Eine Kathete ist ferner dem Produkte der andern Kathete mit der Tangente des der letztern anliegenden spitzen Winkels gleich (B). Bezeichnen wir wie immer die Winkel durch A, B und C, und die ihnen bezüglich gegenüberliegenden Seiten durch a, b und c; so haben wir, wenn $A = 90^0$ ist:

$b = a \cos C$, $c = a \cos B = a \sin C \ldots$ (A),

und $c = b \operatorname{tang} C \ldots$ (B).

§. 37. Wenn man aus dem Scheitel B eines beliebigen Dreiecks ABC (Fig. 7) die Senkrechte BD auf die gegenüberliegende Seite fällt, so wird der Winkel B in zwei andere zerlegt, welche respektive

die Complemente von A und C sind. Die so eben erwiesenen Sätze geben BD = AB sin A, BD = BC sin C, woraus c sin A = a sin C. Folglich $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ .... (C), weil man die Senkrechte vom Scheitel C oder A aus fällen kann. **In jedem Dreieck verhalten sich also die Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.**

Bezeichnet man das Segment AD durch x, so hat man $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$ (Geometrie §. 68); das rechtwinklige Dreieck BDA gibt aber DA = BA × cos A oder x = c cos A, folglich $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .... (D).

Fällt die Senkrechte BD (Fig. 7 a) ausserhalb des Dreiecks, so muß + 2bx anstatt − 2bx gesetzt werden. In diesem Fall wird aber der Winkel BCA stumpf, sein Cosinus mithin negativ; das Zeichen − von 2bc cos A verwandelt sich in +, stellt sich also von selbst her: unsere Formel gilt demnach für alle Fälle. Die Gleichungen (A) und (B) dienen zur Auflösung der rechtwinkligen, die Gleichungen (C) und (D) zu der der schiefwinkligen Dreiecke.

§. 38. Es seien AB = α, BD = β (Fig. 26) irgend zwei Bogen; wir wollen den Sinus und Cosinus der Summe AD sowohl als der Differenz AK jener Bogen vermittelst der Sinus und Cosinus der letztern berechnen. Man ziehe die Sehne DK, auf welcher der durch ihre Mitte geführte Radius senkrecht steht, man ziehe ferner IE, KH mit AC parallel und fälle auf solche die Senkrechte DP, IG und KO. Man sieht nun, daß DP der Sinus und CP der Cosinus von AD = $(\alpha + \beta)$, und KO der Sinus und CO der Cosinus von KA = $(\alpha - \beta)$ ist; es sind diese vier Größen die Unbekannten unserer Aufgabe. Man hat

$\sin(\alpha + b) = DP = IG + DE$;

$\sin(\alpha - \beta) = KO = IG - EH = IG - DE$, weil $DE = EH$;

$\cos(\alpha - \beta) = CO = CG + GO = CG + EI$, weil $GO = EI$;

$\cos(\alpha + \beta) = CP = CG - PG = CG - EI$, weil $PG = EI$;

also $\sin(\alpha \pm \beta) = IG \pm DE$, $\cos(\alpha \pm \beta) = CG \mp EI$.

Es ist nun noch übrig, die vier Linien IG, DE, CG und EI zu bestimmen. Man wendet deshalb die Gleichung (A) auf die rechtwinkligen Dreiecke CIG, DEI, wo Winkel EDI = α ist, an, und erhält dadurch $IG = CI \cdot \sin\alpha$, $DE = DI \cdot \cos\alpha$. Nun ist $DI = \sin\beta$

und $CI = \cos\beta$; folglich $IG = CI \cdot \sin\alpha = \sin\alpha \cos\beta$;

$DE = DI \cdot \cos\alpha = \sin\beta \cos\alpha$;

ebenso hat man $CG = CI \cdot \cos\alpha = \cos\alpha \cos\beta$;

$EI = DI \cdot \sin\alpha = \sin\alpha \sin\beta$; hieraus

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha \ldots$ (E).

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \ldots$ (F).

Diese vier Formeln finden eine sehr häufige Anwendung. Wäre der Radius R anstatt 1, so braucht man blos R als Divisor der zweiten Glieder einzuführen (§. 29).

§. 39. Setzt man $\alpha = \beta$ in den vorstehenden Formeln, so erhält man, indem das obere Zeichen genommen wird:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha \ldots\ldots$ (G),

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \ldots$ (H),

oder wenn man erwägt, daß $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$,

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Vermittelst dieser Formeln findet man den Sinus und Cosinus des doppelten Bogens oder Winkels.

Anmerkung. Um den Sinus und Cosinus von 3α zu erhalten, setzt man $\beta = 2\alpha$, was gibt: $\sin 3\alpha = \sin\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos\alpha$, $\cos 3\alpha = \cos\alpha \cos 2\alpha - \sin\alpha \sin 2\alpha$. Werden die für $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ gefundenen Werthe eingeführt, so kommt $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Löst man diese Gleichungen in Bezug auf $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ auf, so erhält man den Sinus und Cosinus des dritten Theils des Bogens. Man findet auf ähnliche Weise: $\sin 4\alpha = \sin\alpha \cos 3\alpha + \cos\alpha \sin 3\alpha$, $\cos 4\alpha = \cos\alpha \cos 3\alpha - \sin\alpha \sin 3\alpha$, oder wenn die für $\sin 3\alpha$ und $\cos 3\alpha$ erhaltenen Werthe eingesetzt werden, $\sin 4\alpha = 4\sin\alpha \cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha \cos\alpha$, $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$, u. s. w.

§. 40. Sieht man in den Gleichungen (G) und (H) $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ als unbekannt, und $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ als gegeben an, so muß man eine Elimination vornehmen. Da die Rechnung hiedurch etwas verwickelt wird, so wählt man anstatt der ersten Formel die Gleichung $1 = \cos^2\alpha + \sin^2 2\alpha$. Durch Addition und Subtraction der Gleichung (H) erhält man auf der Stelle $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$; $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$.

Aendert man 2α in α, was hier erlaubt ist, um, so hat man

$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ . . . (I). Diese Formeln geben den Cosinus und Sinus der Hälfte eines Bogens. Die im §. 28 angegebene Formel $\sin v\,\alpha = 1 - \cos\alpha$ wird hiernach in $\sin v\,\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ umgeändert, welche für den Gebrauch der Logarithmen bequem ist.

§. 41. Dividiren wir die eine der Formeln (E) und (F) durch die andere, so haben wir $\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\beta\sin\alpha}$. Wird der Zähler und Nenner des Bruchs im zweiten Theil durch $\cos\alpha\cos\beta$ dividirt, so ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß $\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$: $\tang(\alpha \pm \beta) = \frac{\tang\alpha \pm \tang\beta}{1 \mp \tang\alpha \cdot \tang\beta}$ . . . . (K); welche Formel die Tangente der Summe oder der Differenz zweier Bogen gibt. Setzt man $\alpha = \beta$, so findet man die Tangente des doppelten Bogens, nämlich $\tang 2\alpha = \frac{2\tang\alpha}{1 - \tang^2\alpha}$ . . . (L). Dividirt man die eine der Gleichungen (I) durch die andere, so kommt $\tang\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ . . . (M). Man findet auf ähnliche Weise, daß $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$ . . . (N).

Anmerkung. Setzt man in der Formel (K) $\alpha = 45^0$, so kommt, weil $\tang 45^0 = 1$, $\tang(45^0 \pm \beta) = \frac{1 \pm \tang\beta}{1 \mp \tang\beta}$. Hieraus ergibt sich dann weiter $\tang(45^0 + \beta) + \tang(45^0 - \beta) = 2\sec 2\beta$; $\tang(45^0 + \beta) - \tang(45^0 - \beta) = 2\tang 2\beta$.

§. 42. Addiren und subtrahiren wir die Gleichungen (E), so erhalten wir $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$,

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta.$$

Wird die eine Formel durch die andere dividirt, und der Kürze halber $\alpha + \beta = C$ und $\alpha - \beta = B$ gesetzt, so hat man $\alpha = \frac{1}{2}(C + B)$, $\beta = \frac{1}{2}(C - B)$. Folglich

$$\frac{\sin C + \sin B}{\sin C - \sin B} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{\tang\alpha}{\tang\beta} = \frac{\tang\frac{1}{2}(C + B)}{\tang\frac{1}{2}(C - B)}.$$

Die Summe der Sinus zweier Bogen verhält sich also zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe dieser Bogen zur Tangente ihrer halben Differenz.

Aus der Gleichung $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$ (Fig. 7) folgern wir

$$\frac{\sin C + \sin B}{\sin C - \sin B} = \frac{c + b}{c - b}$$

Nun ist $A + B + C = 180^0$, woraus $\frac{1}{2}(C+B) = 90^0 - \frac{1}{2}A$, mithin $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(C+B) = \cot\frac{1}{2}A$; folglich

$$\frac{c + b}{c - b} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(C+B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(C-B)} = \frac{\cot\frac{1}{2}A}{\operatorname{tang}(\frac{1}{2}C-B)} \ldots (O).$$

Anmerkung. Die Formeln (E) und (F) geben

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\beta - \cot\alpha} = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}; \; (1).$$

$$\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin(\alpha\mp\beta)} = \frac{\cot\beta \pm \cot\alpha}{\pm 1 + \cot\alpha\cot\beta} = \frac{\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta}{1 \pm \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}; \; (2).$$

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cot\beta - \operatorname{tang}\alpha}{\cot\beta + \operatorname{tang}\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}{1 + \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}. \; (3).$$

Werden die Formeln (E) und (F) je zwei und zwei mit einander verbunden, so lassen sich anderweitige Formeln ableiten, durch welche die Summe und Differenz der Sinus und Cosinus durch Produkte und Quotienten ausgedrückt sind, was die logarithmische Berechnung erleichtern kann.

$$\sin A \pm \sin B = 2\sin\tfrac{1}{2}(A\pm B) \cdot \cos\tfrac{1}{2}(A\mp B) \ldots (4)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B) \cdot \cos\tfrac{1}{2}(A-B) \ldots (5)$$

$$\cos B - \cos A = 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B) \cdot \sin\tfrac{1}{2}(A-B) \ldots (6)$$

Setzt man $A = 90^0$ in der erstern und $B = 0$ in den beiden andern, so kommt:

$$1 + \sin B = 2\sin(45^0+\tfrac{1}{2}B)\cos(45^0-\tfrac{1}{2}B) = 2\sin^2(45^0+\tfrac{1}{2}B); \; (7).$$

$$1 - \sin B = 2\cos^2(45^0+\tfrac{1}{2}B) = 2\sin^2(45^0-\tfrac{1}{2}B); \; (8)$$

$$1 + \cos A = 2\cos^2\tfrac{1}{2}A; \; 1 - \cos A = 2\sin^2\tfrac{1}{2}A.$$

Setzt man $\alpha = 90^0 + \alpha$ in (M), so erhält man

$$\operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} \ldots (9).$$

Multiplicirt man die Gleichungen (4), oder (5) und (6) mit einander und reducirt, so findet man

$\sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A = \sin(A+B) \cdot \sin(A-B)$; (10)
$\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B) \cdot \cos(A-B)$; (11).

Werden verschiedene Divisionen vorgenommen, so erhält man:

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A+B); \quad (12)$$

$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \tfrac{1}{2}(A+B); \quad (13)$$

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \tfrac{1}{2}(A-B); \quad (14)$$

$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B); \quad (15)$$

$$\frac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B} = -\cot \tfrac{1}{2}(A+B) \cdot \cot \tfrac{1}{2}(A-B); \quad (16)$$

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B)}.$$

$$\frac{1 + \sin B}{1 - \sin B} = \operatorname{tang}^2 (45^0 + \tfrac{1}{2}B); \quad (17)$$

$$\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = \cot^2 \tfrac{1}{2}A; \quad (18)$$

$$\frac{1 + \sin B}{1 + \cos A} = \frac{\sin^2(45^0 + \frac{1}{2}B)}{\cos^2 \frac{1}{2}A}; \quad (19)$$

$$\frac{1 - \sin B}{1 - \cos B} = \frac{\sin^2(45^0 - \frac{1}{2}B)}{\sin^2 \frac{1}{2}B}; \quad (20)$$

$$\operatorname{tang} A \pm \operatorname{tang} B = \frac{\sin A}{\cos A} \pm \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B}; \quad (21)$$

$$\cot A \pm \cot B = \frac{\sin(B \pm A)}{\sin A \sin B}; \quad (22)$$

$$\operatorname{tang} A \pm \cot B = \pm \frac{\cos(A \mp B)}{\sin B \cos A}; \quad (23)$$

$$\cot A \pm \operatorname{tang} B = \frac{\cos(A \mp B)}{\sin A \cos B}; \quad (24).$$

Durch verschiedene Combinationen lassen sich diese Formeln noch sehr vervielfältigen. Man sehe L. Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen, aus dem Lateinischen übersetzt von Michelsen, Berlin bei Reimer; ferner E. Salomons Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Wien bei Gerold.

Von der Construction der trigonometrischen Tafeln.

§. 43. Bis jetzt sind die oben stehenden Formeln für uns noch von keinem Nutzen; um sie zur Auflösung der Dreiecke gebrauchen zu können, muß man zuvörderst die Sinus der gegebenen Winkel kennen, um ihre Werthe in unsere Gleichungen einzuführen; oder, wenn die gedachten Gleichungen die Winkel bestimmen sollen, muß man für einen bekannten Sinus den Bogen finden. Es ist daher nothwendig, trigonometrische Tafeln anzuordnen, mittelst welcher die trigonometrischen Linien gefunden werden, wenn man die Bogen kennt, und umgekehrt.

Wir wollen uns also denken, daß man den Quadranten in Grade, Minuten und Secunden, und den Radius in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt habe, daß man ferner dahin gelangt sei, anzugeben, wie viel solcher Theile oder Einheiten jeder Sinus, Cosinus.... enthalte, daß endlich diese Zahlen dem zugehörigen Bogen beigeschrieben seien. Auf diese Weise wird eine Tafel entstehen, deren erste Columne die Bogen, die zweite die Sinus, die dritte die Cosinus.... enthält. Aus den Gleichungen 1, 3, 5 ist aber ersichtlich, daß eine sehr einfache Rechnung die Cosinus, Tangenten... gibt, wenn man die Sinus kennt; es kommt also zunächst auf die unmittelbare Berechnung der Sinus an, und zwar braucht dieselbe nur bis auf 45^0 Grade ausgedehnt zu werden, weil für größere Bogen die gefundenen Werthe wiederkehren. Es handelt sich also lediglich darum, die Sinus und Cosinus sämmtlicher Bogen, die kleiner als 45^0 sind, zu berechnen, wobei der Quadrant in Grade, Minuten, Secunden getheilt angenommen wird.

Die erste Gleichung des vorigen Paragraphen und die, welche man erhält, indem man die Gleichungen (F) addirt, geben, wenn $\alpha = mx$ und $\beta = x$ gesetzt wird.

$$\sin(m+1)x = 2\cos x \cdot \sin mx - \sin(m-1)x,$$

$$\cos(m+1)x = 2\cos x \cdot \cos mx - \cos(m-1)x.$$

Wenn die Bogen in der Ordnung x, $2x$, $3x$ ... $(m-1)x$, mx, $(m+1)x$... fortschreiten, so ist x der kleinste Bogen der Tafel. Sind nun z und y die Sinus oder Cosinus zweier successiven Bogen $(m-1)x$ und mx, und $p = \cos x$, so hat der Sinus oder Cosinus des nächstfolgenden Bogens $(m+1)x$ zu seinem Werth $2py-z$. Jedes Glied

der Sinus- und Cosinus-Reihe hängt also von den beiden unmittelbar vorhergehenden Gliedern ab, und wird dadurch erhalten, daß man dieselben mit $2p - 1$ multiplicirt und addirt.

§. 44. Man nehme Bogen $AC = CB = AL$ (Fig. 27), ziehe die Sehne AB und die Tangenten LE, CE. Man hat dann Sehne AB $<$ Bogen AB, LEC $>$ Bogen LAC; woraus AI oder $\sin AC <$ Bogen AC, EC oder $\operatorname{tang} AC >$ Bogen AC. Die Länge eines Bogens, der weniger als 90^0 beträgt, ist demnach kleiner als die seiner Tangente und größer als die seines Sinus. Aus der Gleichung $\frac{\sin x}{\operatorname{tang} x} = \frac{\cos x}{A}$, deren zweites Glied der Einheit immer näher kommt, je kleiner x wird, folgt, daß das erste Glied ebenfalls die Einheit zur Grenze hat, d. h. der Sinus, der Bogen und die Tangenten kommen der Gleichheit unaufhörlich näher, je mehr der Bogen abnimmt, wobei derselbe stets zwischen den beiden andern liegt. Dieser Satz dient zur Berechnung des Sinus des kleinsten Bogens in der Tafel. Denn aus der Gleichung $\operatorname{tang} \frac{1}{2}x$ oder $\frac{\sin \frac{1}{2}x}{\cos \frac{1}{2}x} > \frac{1}{2}x$ folgt $\sin \frac{1}{2}x > \frac{1}{2}x \cdot \cos \frac{1}{2}x$; wird beiderseits mit $2\cos \frac{1}{2}x$ multiplicirt, so hat man $2\sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x > x \cos^2 \frac{1}{2}x$, oder $\sin x > x(1 - \sin^2 \frac{1}{2}x)$, folglich um so mehr $\sin x > x - \frac{1}{4}x^3$, weil $\sin \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}x$. Hieraus erhellet, daß $\sin x$ zwischen x und $x - \frac{1}{4}x^3$ liegt, nämlich $\sin x > x - \frac{1}{4}x^3$ und $< x$.

Gehen wir von $\pi = 3{,}1415926536$ und $\log. \pi = 0{,}49714987$ aus, um x, das ein bestimmter Bruch des Halbkreises π ist, und hierauf $x - \frac{1}{4}x^3$ zu berechnen, so werden, da $\sin x$ zwischen diesen beiden Grenzen liegt, die ihnen gemeinschaftlich angehörigen ersten Decimalziffern einen genäherten Werth für $\sin x$, wobei der Radius 1 gilt, geben. Nimmt man x hinlänglich klein, so kann, da $\sin x$ und x sich immer weniger und weniger von einander unterscheiden, die Annäherung so weit als man nur immer will getrieben werden. Setzt man $\sin x = a$ so ist $\cos x = \sqrt{(1 - \sin^2 x)} = \sqrt{(1 + a)(1 - a)} = p$, mithin der Factor 2p als bekannt anzusehen. Fängt man nun von $\sin o = o$, $\sin x = a$ einerseits, und von $\cos x = 1$, $\cos x = p$ anderseits an; so berechnet man mittelst des obenerwähnten Gesetzes $2py - z$ nach einander die Sinus und Cosinus der Bogen 2x, 3x, 4x... Ist z. B. $x = 30'$, so ist $x = 180$te Theil des Quadranten $= 0{,}008726646$,

$\frac{1}{4}x^3 = 0{,}000000166$; $x - \frac{1}{4}x^3 = 0{,}00872648$; folglich $\sin 30' = 0{,}008726$. Wenn die Tafel von Minute zu Minute bis auf 6 Decimalstellen gehen soll, so können alle die Sinus der Bogen, die kleiner als 30′ sind, den Bogen gleich gesetzt werden: $\sin 1'$, $\sin 2'$, $\sin 3' \ldots$, sind bezüglich $\frac{1}{30}$, $\frac{2}{30}$, $\frac{3}{30} \ldots$ von 0,008726. Hieraus sieht man, daß man die Bogen von 30′ zu 30′ wachsen lassen muß, welche hernach mit Leichtigkeit näher aneinander gerückt werden können. Man findet $p = \cos 30' = \sqrt{(1{,}008726 \times 0{,}991274)} = 0{,}999962 = 1 - 0{,}000038$. Der Factor $2p$ ist $2 - 0{,}000076$; es ist also nicht schwer, die andern Zahlen der Tafel zu berechnen.

Im Allgemeinen, wenn man $x = \sin x$ setzen will, darf in den beizubehaltenden Decimalstellen des Werthes von $\frac{1}{4}x^3$ keine bedeutende Ziffer erscheinen. Verlangte man z. B. die Werthe bis auf 8 Decimalstellen, so müssen die 8 ersten Ziffern von $\frac{1}{4}x^3$ Nullen sein; in diesem Fall würde man bis zu dem Bogen von 10′ herabgehen. Uebrigens muß man stets mehr Decimalziffern, als man beibehalten will, nehmen, damit die Anhäufung der Fehler und die Unrichtigkeit der letzten Ziffern so viel wie möglich vermieden werden. Die gefundenen Resultate von Intervall zu Intervall zu erproben, trägt man Sorge, entweder mit Hülfe der Formeln $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\sin 2\alpha$, oder indem man die Sinus von Grad zu Grad ebenso oder anders vorher berechnet. Wir werden in der Folge weit bequemere Methoden kennen lernen, die Sinus, Cosinus... zu finden; die hier angegebene ist jedoch für unsern Gegenstand ausreichend.

Um die Rechnungen zu erleichtern hat man statt der auf diese Art erhaltenen Werthe ihre Logarithmen in die Tafel aufgenommen. Weil die Sinus kleiner als der Radius sind, so ist es angemessen, den Radius aus einer hinlänglichen Anzahl von Einheiten bestehend anzunehmen, damit der Sinus des kleinsten Bogens der Tafel die Einheit übertreffe und die negativen Logarithmen vermieden werden. In den meisten Tafeln ist der Logarithme des Radius = 10 oder $R = 10^{10}$.

Will man mit einer Formel, in welcher der Radius = 1 angenommen ist, eine Rechnung ausführen, so muß man die Potenzen von R, die durch die Annahme von $R = 1$ verschwunden sind, wieder herstellen, worauf man dann zur Anwendung der Tafeln, in denen $\log. R = 10$ ist, schreitet. Man kann auch $R = 1$ stehen lassen und 10 von sämmtlichen Logarithmen der trigonometrischen Linien abziehen, was negative Kennziffern mit sich bringt. So z. B. für $\log. \sin 10^0$

steht 0,2396 ... — 1, anstatt 9,2396 ...; desgleichen für log. tang 1° kommt 0,2419 ... — 2 anstatt 8,2419 ... Dergleichen negativen Kennziffern verursachen keine Schwierigkeit, leicht gewöhnt man sich an ihren Gebrauch.

Anmerkung. Die Werthe der trigonometrischen Linien für einen bestimmten Radius werden zuweilen die natürlichen Linien, ihre Logarithmen dagegen die künstlichen Linien genannt.

Die gewöhnlichsten Tafeln sind die von Callet oder die von Vega für die alte Eintheilung, und die von Borda oder die von Hobert und Ideler für die neue Eintheilung. Die Einrichtung dieser Tafeln ist nicht überall dieselbe, sie wird nebst ihrem Gebrauch bei jeder einzelnen Sammlung in der daselbst vorgesetzten Einleitung gewöhnlich erklärt.

Von der Auflösung der Dreiecke.

§. 45. I. Von den rechtwinkligen Dreiecken. Die Auflösung aller rechtwinkliger Dreiecke (Fig. 25) wird vermittelst der beiden Gleichungen (A) und (B) bewerkstelligt; denn es kommen in denselben die Seiten b, c, a und der Winkel C vor, wonach, wenn von diesen vier Größen zwei gegeben sind, die beiden andern sich bestimmen lassen. Wird C eliminirt, so erhält man die sehr häufig angewandte Gleichung $a^2 = b^2 + c^2$. Setzen wir den Radius = R in den erwähnten Gleichungen, so haben wir $Rb = a \cos C$ ... (1), $Rc = b \tang C$ ... (2), $a^2 + b^2 = c^2$ ... (3). Es können jetzt folgende zwei Fälle statt finden.

1) Ein spitzer Winkel C und eine Seite ist gegeben. Die beiden andern Winkel sind bekannt, weil $A = 90^0$ und $B = 90^0 - C$. Die beiden unbekannten Seiten werden wie folgt gefunden: Kennt man die Hypothenuse, so gibt die Gleichung (1) die Seite b. Kennt man die Seite b, so gibt die Gleichung (2) die Seite c, die Gleichung (1) die Hypothenuse.

Es sei z. B. $C = 33^0 30'$, $b = 45,54^m$; die Gleichungen (1) und (2) schreiben nachstehende Rechnung vor:

log. b	= 1,6583930	. . . .	1,6583930
log. R	= 10,0000000	log. tang C =	9,8207829
—log. cos C	= 9,9211066	—log. R =	10 0000000
log. a	= 1,7372864	log. c =	1,4791759;

folglich $a = 54{,}612^m$ und $c = 30{,}142^m$. Mittelst dieser Operation läßt sich die Höhe AB′ eines Gebäudes (Fig. 28), dessen Fuß A zugänglich ist, finden.

Die Richtigkeit der Rechnung wird dadurch erprobt, daß man die Unbekannten verändert.

2) Zwei Seiten sind gegeben: Kennt man b und c, so gibt die Gleichung (2) den Winkel C; die Hypothenuse wird dann mit Hülfe der Gleichung (1) gefunden. Auch kann man a aus der Gleichung (3) ableiten; dieselbe ist jedoch für die logarithmische Rechnung nicht bequem. Kennt man die Hypothenuse a und die Seite b, so gibt die Gleichung (1) den Winkel C; zur Bestimmung der Seite c erhält man aus der Gleichung (3) $c = \sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{[(a+b)(a-b)]}$.

Anmerkung. Man muß den Formeln, welche bei Zahlenrechnungen gebraucht werden sollen, allemal eine solche Gestalt zu geben suchen, daß sich die Logarithmen bequem dabei anwenden lassen, daß man nämlich während der Rechnung so wenig wie möglich von den Logarithmen zu den Zahlen und von den Zahlen wieder zu den Logarithmen überzugehen nöthig hat.

II. Von den schiefwinkligen Dreiecken. Es kommen hier vier Fälle vor:

1) Eine Seite a und zwei Winkel B und C sind gegeben. Der dritte Winkel A ist bekannt und man hat vermöge der Gleichung (C), in §. 37:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},\ c = \frac{a \sin C}{\sin A} \ldots (4).$$

Es sei z. B. $a = 28{,}852^m$, $A = 37^0\,29'$, $C = 72^0\,9'$; hieraus folgt $B = 70^0\,22'$. Man hat

log. a	= 1,4601759	....	1,4601759
log. sin B	= 9,9739873	log. sin C =	9,9785741
—log. sin A	= 9,7842824	..... —	9,7842824
log. b	= 1,6498808	log. c =	1,6544676;

folglich $b = 44{,}656^m$ und $C = 45{,}130^m$.

Die vorstehende Rechnung dient dazu, die Distanz AC von C nach einem unzugänglichen, jedoch sichtbaren Punkt A (Fig. 28) zu bestimmen; desgleichen gibt sie die Höhe AB′ und die Entfernung AC eines Gebäudes, dessen Fuß unzugänglich und unsichtbar ist. Denn mißt man eine horizontale

Basis BC und die Winkel B'CB, B'BC, welche dieselbe mit den nach dem Scheitel B' gehenden Linien bildet, so kennt man B'C und den Winkel ACB', da sich letzterer wegen der horizontalen Lage von AC, ohne den Fuß A zu sehen, messen läßt.

Es ist nothwendig, in der Anwendung der zur Auflösung der Dreiecke gehörigen Formeln einige Uebung zu haben; wir geben deshalb hier unten die Seiten und Winkel von Dreiecken an, auf welche man die erwähnten Gleichungen anwenden kann. Nach Belieben können diese oder jene Stücke als gegeben angenommen werden, die andern sind dann die durch die Rechnung zu findenden Unbekannten. Durch Aenderung der Bestimmungsstücke erhält man verschiedene Probleme, welche mit Hülfe der oben aufgeführten Formeln aufzulösen sind und eben so viele Uebungsbeispiele sein werden, um Gewandtheit in der Ausführung derlei Rechnungen zu erlangen.

Rechtwinkliges Versuchs-Dreieck.

$a = 56{,}925^m$;	$b = 45{,}540^m$;	$c = 34{,}154^m$;
log. a = 1,7553030;	log. b = 1,6583930;	log. c = 1,5334543.
$A = 90^0$;	$B = 53^0 7' 48'',4$;	$C = 36^0 52' 11'',6$;
log. sin B = 9,9030900;	log. cos B = 9,7781512;	log. tang B = 10,1249389.

Schiefwinkliges Versuchs-Dreieck.

Seiten.	Logarithmen.			
$a = 57{,}770^m$;	log. a = 1,7617024;	log. p = log. $\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$	=	2,0357459;
b = 71, 577;	log. b = 1,8647735;	log. (p—a)	=	1,7059406;
c = 87, 811;	log. c = 1,9435489;	log. (p—b)	=	1,5682252;
		log. (p—c)	=	1,3173947;

Winkel.	log. sin.	log. cos.	log. tang.
$A = 40^0 56' 00'',00$	9,8163609	9,8782106	9,9381423
B = 54·16· 8,48	9,9094319	9,7663981	10,1430338
C = 84·47·51,52	9,9982073	8,9574805	11,0407268.

2) Zwei Seiten c, a und ein Gegenwinkel A sind gegeben. Die Gleichung (4) gibt $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$. Da der Werth von sin C den beiden Supplementen C gleichzeitig angehört, so erhält man zwei Auflösungen (die Dreiecke ABC Fig. 7 und Fig. 7 a). Oefters ist nur eine einzige Auflösung zuläßig, wie es im Paragraphen 56 der

Elementar-Geometrie gezeigt wurde. Ohne gerade darauf besondere Rücksicht zu nehmen, deutet jedoch die Rechnung von selbst diesen Fall an. Man bildet nämlich für die beiden durch die Rechnung gegebenen Werthe von C die Summe $A + C$, um hieraus den Supplementwinkel B herzuleiten. Ist nun der Winkel A stumpf, so kann man nur den Werth von C, der kleiner als 90^0 ist, gebrauchen, weil sonst $A + C > 180^0$ sein würde. Es ist also nur eine Auflösung; dabei muß noch $a > c$ sein, weil, wenn $a < c$ wäre, unsere Gleichung $\sin A < \sin C$ geben würde, mithin der spitze Supplementwinkel von A kleiner als der spitze Winkel C, d. h. $180^0 - A < C$, folglich $A + C > 180^0$. Die Ungereimtheit läge auf solche Weise zu Tag.

Für den Fall, daß der Winkel A spitz ist und dabei $a =$ oder $> c$, gibt unsere Gleichung $\sin C =$ oder $< \sin A$; die Rechnung führt demnach zu dem Werth des spitzen Winkels $C < A$; das Supplement $180^0 - C$ kann folglich nicht genügen, weil durch Hinzufügung von A die Summe $180^0 + A - C > 180^0$. Der Aufgabe entspricht also stets eine Auflösung und zwar nur eine.

Für den Fall endlich, daß A spitz ist, und dabei $a < c$ gibt uns das rechtwinklige Dreieck ABD die Senkrechte $BD = p \dfrac{C \sin A}{R}$, wodurch $\sin C = \dfrac{Rp}{a}$. Man erhält $\sin C > R$, d. i. eine Ungereimtheit, wenn $a < p$; dagegen $\sin C = R$ oder $C = 90^0$, wenn $a = p$, d. h. das rechtwinklige Dreieck BDA genügt allein; für $a > p$ endlich hat man den einzigen Fall, in welchem zwei Auflösungen zulässig sind. Alles dies ist mit dem, was man schon kennt, vollkommen übereinstimmend.

Hier steht die Zusammenstellung der verschiedenen Fälle:

Wenn $A =$ oder $> 90^0$, nur eine Auflösung, B und C sind spitz, $a > c$;

wenn $A < 90^0$ und dabei
- $a < c \sin A$, unmögliche Aufgabe;
- $a = c \sin A$, ein einziges rechtwinkliges Dreieck, B und A sind spitz;
- $a > c \sin A$ und $> c$, nur ein Dreieck, C ist spitz;
- $a > c \sin A$ und $< c$, zwei Auflösungen, C hat zwei Supplementwerthe.

3) Zwei Seiten b und c nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel A sind gegeben. Die Formel (O) (§. 42)

gibt, wenn man $n = \frac{1}{2}(C-B)$ setzt, $\tan n = \frac{c-b}{c+b} \cot \frac{1}{2}A \ldots (5)$; mittelst dieser Gleichung wird der Winkel $n < 90^0$ bestimmt. Aus der Bedingung $A + B + C = 180^0$ folgt $\frac{1}{2}(C+B) = 90^0 - \frac{1}{2}A$, welchen bekannten Werth wir durch m darstellen wollen. Wir haben demnach $\frac{1}{2}(C+B) = m$, $\frac{1}{2}(C-B) = n \ldots (6)$; woraus $C = m + n$, $B = m - n$.

Es bleibt noch die Seite a nach dem oben angegebenen Verfahren zu bestimmen übrig.

Man kann auch $\tan \varphi = \frac{c}{b}$ setzen, mittelst welcher Gleichung der Hülfswinkel C bestimmt wird. Die Formel (K) (§. 41) gibt aber $\tan(\varphi - 45^0) = \frac{\tan \varphi - 1}{1 + \tan \varphi} = \frac{c-b}{c+b}$; hierdurch wird die Gleichung (O) in $\tan \frac{1}{2}(C-B) = \tan(\varphi - 45^0) \cdot \cot \frac{1}{2}A$ umgeändert.

Diese Art von Auflösung ist von Nutzen, sobald man anstatt der Zahlen für b und c zusammengesetzte Monome oder die Logarithmen gibt.

Ohne vorerst die Winkel zu berechnen, läßt sich auch unmittelbar die dritte Seite finden, und solche im Gegentheil zur Aufsuchung der Winkel gebrauchen. In der That erhalten wir aus der Formel (D), wenn wir 2bc addiren und abziehen, und anstatt $1 - \cos A$ seinen Werth $2\sin^2 \frac{1}{2}A$ (§. 40) einführen: $a^2 = (b-c)^2 + 2bc(1 - \cos A) = (b-c)^2 \left(1 + \frac{4bc \sin^2 \frac{1}{2}A}{(b-c)^2}\right)$. Nun setze man $\frac{4bc \sin^2 \frac{1}{2}A}{(b-c)^2} = \tan^2 \varphi$, was uns frei steht, da die Tangenten alle möglichen Werthe haben können. Hiernach verwandelt sich unsere obige Gleichung in: $a = (b-c)\sqrt{(1 + \tan^2 \varphi)} = (b-c) \sec \varphi$. Bringt man in die Formel den Halbmesser R, so hat man

$$a = \frac{R(b-c)}{\cos \varphi}, \quad \tan \varphi = \frac{2 \sin \frac{1}{2}A}{b-c} \sqrt{bc} \ldots\ldots (7).$$

Diese Formeln lassen sich ganz logarithmisch behandeln. Man erhält den Werth von a, nachdem zuerst $\tan \varphi$ gefunden worden. Auf nachstehendes Beispiel wollen wir nun beide Verfahren anwenden. Es sei $c = 87{,}812$ Meter, $b = 71{,}577$ Meter, $A = 40^0\ 56'$; hieraus $c + b = 159{,}389$ und $c - b = 16{,}235$.

Erstes Verfahren.	Zweites Verfahren.
$\log. \cot \frac{1}{2}A \ldots = 10{,}4280331$	$\log. c = 1{,}9435539$
$\log. (c-b) \ldots = 1{,}2104523$	$\log. b = 1{,}8547735$
$-\log. (c+b) \ldots = -2{,}2024585$	$\log. bc = 3{,}7983274$
$\log. \tan n = 9{,}4360269$	Hälfte $= 1{,}8991637$
$m = 69^0 32'$	$\log. 2 = 0{,}3010300$
$n = 15^0 16'$	$\log. \sin \frac{1}{2}A = 9{,}5436489$
$m + n = 84^0 48' = C$	$-\log. (c-b) = -1{,}2104523$
$m - n = 54^0 16' = B$	$\log. \tan \varphi = 10{,}5333903$
$\log. c = 1{,}9435539$	$\varphi = 73^0,40'43''$
$\log. \sin A = 9{,}8163609$	$\log. R(c-b) = 11{,}2104523$
$-\log. \sin C = -9{,}9982089$	$-\log. \cos \varphi = -9{,}4487449$
$\log. a = 1{,}7617059$	$\log. a = 1{,}7617074$
$a = 57{,}770^m$	

Ereignet es sich, daß b von c sehr verschieden ist, so wird der Winkel φ sehr klein und $\cos\varphi$ fast $= 1$. In solchem Fall hat die Rechnung nicht mehr die hinlängliche Genauigkeit. Mit Hülfe der Formel $\cos A = 2\cos^2 \frac{1}{2}A - 1$ erhält aber die Gleichung (D) folgende Form:

$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\tfrac{1}{2}A = (b+c)^2 \left(1 - \frac{4bc\cos^2\frac{1}{2}A}{(b+c)^2}\right).$$

Der letzte Bruch ist < 1, weil sonst a imaginär würde. Man kann also hier $\sin\varphi = \frac{2\cos\frac{1}{2}A}{b+c}\sqrt{bc}$ setzen, wodurch entsteht $a = (b+c)\cos\varphi$.

Anmerkung. Es dürfen weder die Cosinus noch Cotangenten von zu kleinen Bogen, oder von solchen, die nahe bei 180^0 liegen, desgleichen weder die Sinus noch Tangenten von nahe an 90^0 oder 270^0 grenzenden Bogen in Rechnung gebracht werden, weil sich derlei Linien für geringe Bogenänderungen sehr wenig von einander unterscheiden. Es ergibt sich dies aus dem bloßen Anblick der Logarithmentafeln. Damit die Rechnung möglichst genau würde, müßten die Logarithmen bis auf eine größere Anzahl von Decimalstellen berechnet sein.

4) Die drei Seiten sind gegeben. Um den Winkel A zu erhalten, nimmt man seine Zuflucht zu der Gleichung (D)

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Dieser Ausdruck bietet die nämliche Schwierigkeit wie der vorhergehende Fall dar, indem er für die Berechnung mit Logarithmen nicht bequem ist. Setzt man aber diesen Werth für $\cos A$ in die Gleichung $\sin^2 \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(1-\cos A)$, so findet man $\sin^2 \frac{1}{2}A = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}$. Nun ist der Zähler die Differenz zweier Quadrate; mithin kommt, wenn der Halbmesser R eingeführt wird, $\sin \frac{1}{2}A = R\sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}}$...(8).

Diese Gleichung erfüllt schon ihren Zweck; sie wird aber noch einfacher, wenn man den Umfang des Dreiecks durch $2p = a + b + c$ darstellt. Man erhält dann $\sin \frac{1}{2}A = R\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$. Durch Benutzung der Gleichung $\cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(1+\cos A)$ wird auf ähnliche Art gefunden: $\cos \frac{1}{2}A = R\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ . . . (9).

Man wendet von diesen beiden Gleichungen eine oder die andere nach Belieben an, insofern $\frac{1}{2}A$ nicht zu nahe von 0^0 oder von 90^0 liegt. (Man vergleiche die vorhergehende Anmerkung.) Da in jedem Dreieck $\frac{1}{2}A$ kleiner als 90^0 ist, so hat die Aufgabe nur eine Auflösung.

Anmerkung. Will man den Sinus des ganzen Winkels eines Dreiecks durch die Seiten desselben ausdrücken, so wird dies sehr leicht wie folgt bewerkstelligt: Es ist $\sin A = 2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$ $= \frac{2}{bc}\sqrt{[p(p-a)(p-b)(p-c)]}$.

Um den Gebrauch dieser Formeln zu erläutern, wenden wir sie auf folgendes Beispiel an. Es sei $c = 103{,}357$ Meter, $b = 106{,}836$ Meter, und $a = 142{,}985$ Meter. Hier ist $2p = 353{,}178$ Meter, $p-b = 69{,}753$ Meter, $p-c = 73{,}232$ Meter, $p-a = 33{,}604$ Meter. Folglich

$\log.(p-b) = 1{,}8435629$	$\log.(p-a) = 1{,}5263910$
$\log.(p-c) = 1{,}8647009$	$\log.(p-c) = 1{,}8647009$
$-\log.b = -2{,}0287176$	$\log.a = -2{,}1552906$
$-\log.c = -2{,}0143399$	$\log.c = -2{,}0143399$
$0{,}6652063-1$	$0{,}2214614-1$
Hälfte $0{,}8326031-1 = \log.\sin\frac{1}{2}A$.	Hälfte $0{,}6107307-1 = \log.\sin\frac{1}{2}B$.
$\frac{1}{2}A = 42^0 51' 20''$; $A = 85^0 43'$	$\frac{1}{2}B = 24^0 5'$; $B = 48^0 10'$.

Man findet ebenso $C = 46^0 7'$; die Richtigkeit der Rechnung wird durch die Bedingung $A+B+C = 180^0$ erprobt.

III. Das Dreieck ist gleichschenklig. Stellt A den Winkel am Scheitel, mithin a die Basis dar; so gibt die Gleichung (8), wenn man b = c setzt, $\sin\frac{1}{2}A = \frac{aR}{2b} = \frac{(p-b)R}{b}$ .... (10); mittelst dieser Gleichung kann man eine der drei Größen a, b und A finden. Bemerkt mag noch werden, daß, wenn man einen von den Winkeln gibt, die andern durch die Gleichung $B = C = 90^0 - \frac{1}{2}A$ bestimmt sind.

Trigonometrische Auflösung mehrerer Aufgaben aus der Geometrie.

§. 46. Die meisten Aufgaben der praktischen Geometrie reduciren sich auf die Auflösung der Dreiecke. Wir wollen nun einige dieser am häufigsten vorkommenden Aufgaben mittheilen.

I. Den Abstand AC (Fig. 29) von zwei unzugängigen Punkten zu bestimmen. Man mißt die Linie BD, die Basis der Operation, und die Winkel ABC, CBD, ADC, ADB, die zwischen dieser Basis und den von den Endpunkten B und D derselben nach den Punkten A und C gehenden Linien liegen. Die Auflösung der Dreiecke ABD und CDB gibt die Entfernungen AB, BC des Punktes B von den unzugängigen Punkten A und C. Man kennt jetzt in dem Dreieck ABC zwei Seiten AB, BC und den von ihnen eingeschlossenen Winkel; es wird sich daher AC berechnen lassen.

II. Einen Winkel, einen Punkt oder eine Länge auf den Horizont zu reduciren. Es trifft sich selten, daß die Signale in einerlei Horizontalebene liegen: in diesem Fall sind es nicht mehr die beobachteten Winkel, Punkte und Längen, welche man in den Plan einträgt, sondern ihre Horizontalprojectionen. Wenn also das von B und C (Fig. 28) aus beobachtete Signal die Spitze eines Gebäudes oder Berges ist, so muß A statt B′, der Winkel CAB statt CB′B, der Winkel ACB für B′CB u. s. w. gesetzt werden. Wir sehen sämmtliche Stücke des Dreiecks B′CB mit Hülfe der Messung oder Rechnung als bekannt an. Nachdem der Winkel ACB′ gemessen ist, was wegen der horizontalen Lage von AC stets angeht, löst man das rechtwinklige Dreieck CAB′ auf, wodurch CA und die Höhe AB′ bestimmt sind. Die letztere und die Hypothenuse dienen zur Aufsuchung

der Seite AB in dem rechtwinkligen Dreieck BAB′. Man kennt jetzt die drei Seiten des Horizontaldreiecks CBA, mithin die Winkel desselben und die Lage des Punktes A.

Es sei B′C (Fig. 28) eine in einer gegen den Horizont geneigten Ebene gemessene Länge, von welcher die Horizontalprojection, oder $a \cos C$, in den Plan eingetragen ist. Oefters enthält C nur eine geringe Anzahl von Graden, in welchem Falle die Reduction $x = a \cos C$ nicht mehr die erforderliche Schärfe besitzt. Man zieht hier vor, den Unterschied zwischen a und x, oder $e = a - a \cos C$ zu berechnen. Nun ist $1 - \cos C = 2 \sin^2 \frac{1}{2} C$, mithin $E = 2 a \sin^2 \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} a C^2$, wenn man statt des Sinus den Bogen, der sehr klein ist, nimmt. Wird die Zahl C′ seiner Minuten, oder $C = C' \sin 1'$ gesetzt; so erhält man $e = \frac{1}{2} a C'^2 \sin^2 1'$, und die auf den Horizont reducirte Länge x ist $= A - \frac{1}{2} a C'^2 \sin^2 1'$.

III. Die verticale Höhe $BD = x$ (Fig. 7 a) zu finden. Wenn der Fußpunkt D der Verticale zugängig ist, mißt man die horizontale Linie AD und den Winkel A; das rechtwinklige Dreieck ABD gibt dann $x = AD \cdot \tang A$.

Wenn der Fußpunkt D unzugängig ist, mißt man in gerader Richtung gegen D eine Distanz AC; ferner die Winkel A und C. Man hat dann $x = AD \cdot \tang A$ und $x = DC \cdot \tang C$, woraus durch Herleitung der Werthe von AD und DC und durch Abziehung entsteht
$$AC = \frac{x}{\tang A} - \frac{x}{\tang C}, \text{ folglich } x = \frac{AC \cdot \sin A \cdot \sin C}{\sin (C - A)}.$$

Anmerkung. Wenn die Ebene ACB (Fig. 30), auf welcher die Basis AC (b) in gerader Richtung nach D gemessen werden kann, nicht horizontal ist, mißt man die Winkel CAH (α) BAC (β), BCD (γ). Das Dreieck BAC gibt $BC = \frac{b \sin \beta}{\sin(\gamma - \beta)}$.
Nun ist in dem Dreieck BCD der Winkel $DBC = 90 - (\alpha + \gamma)$, ferner $BC : BD\ (x) = \sin (DBC + \gamma) : \sin \gamma$; also $BD = x = \frac{b \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\gamma - \beta) \cos \alpha}$. Wenn die Horizontaldistanz nicht unmittelbar, ausserdem auch in gerader Richtung nach D keine Basis gemessen werden kann, mißt man eine Basis AC (b) (Fig. 31) in beliebiger Richtung, ferner in C die Winkel α und γ, in A die Winkel β und δ. Man hat $CD = \frac{b \sin \delta}{\sin (\gamma + \delta)}$, DA =

$\frac{b \sin\gamma}{\sin(\gamma+\delta)}$; die verticalen Dreiecke BCD, BDA geben $BD = CD \cdot \tang\alpha$ $= DA \cdot \tang\beta$; also $BD = x = \frac{b \sin\delta \tang\alpha}{\sin(\gamma+\delta)} = \frac{b \sin\gamma \tang\beta}{\sin(\gamma+\delta)}$.

IV. Das Dreieck ABC (Fig. 29) ist gegeben; man soll die Lage eines Punktes D vermittelst der Winkel $ADC = \beta$ und $ADB = \gamma$ bestimmen. Man nenne a, b, c die Seiten des gegebenen Dreiecks und nehme als unbekannt die Winkel $ABD = x$, $ACD = y$. Die Dreiecke ACD und ABD geben $DA = \frac{b \sin y}{\sin\beta} = \frac{c \sin x}{\sin\gamma}$. Berechnen wir den Hülfswinkel nach der Formel $\tang\varphi = \frac{c \sin\beta}{b \sin\gamma}$, so wird $\tang\varphi = \frac{\sin y}{\sin x}$. Hieraus ergibt sich $\frac{1+\tang\varphi}{1-\tang\varphi} = \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y}$ oder $\tang(45^\circ+\varphi) = \frac{\tang\frac{1}{2}(x+y)}{\tang\frac{1}{2}(x-y)}$ (§§. 41 und 42). Setzen wir, zur Abkürzung, $m = \frac{1}{2}(x+y)$, $n = \frac{1}{2}(x-y)$, wo m bekannt ist, weil in dem Viereck ABCD ist $x + y = 360 - (A+\beta+\gamma)$; so haben wir folgende Formeln: $\tang\varphi = \frac{c \sin\beta}{b \sin\gamma}$; $x = m+n$; $\tang n = \tang m \cot(45^\circ+\varphi)$; $y = m - n$. Die erste dieser Formeln gibt φ, die dritte n; mithin kennt man die Winkel x und y und die Lage des Punktes D. Leicht kann man nun auch die Entfernung AD, CD und BD berechnen. Bei einem negativen Werthe von $\tang n$ nimmt n ein entgegengesetztes Zeichen in den Werthen von x und y an. Liegen die Punkte A, B, C, D nicht in einerlei Horizontalebene, so müssen sie vorerst darauf reducirt werden. In der Elementar-Geometrie (§. 59) haben wir die graphische Auflösung dieses Problems gegeben.

Anmerkung. Die so eben behandelte Gleichung hat die Form $A \sin x = B \sin y$; dabei kennt man die Summe $y+x = 2m$. Die Aufgabe, welche oben gelöst wurde, kommt demnach, wie man sieht, auf folgende zurück: Zwei Bogen x und y zu finden, von denen man die Summe und das Verhältniß der Sinus kennt. Die Rechnung selbst kann leicht mittelst der Logarithmen geschehen. Die Auflösung der Gleichung $A \sin x = B \sin y = B \sin(2m-x)$ ist also gefunden.

V. Den Flächeninhalt z eines Dreiecks zu berechnen:

1) Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Man findet leicht $z = \frac{1}{2} ab \sin C$.

2) Aus einer Seite und den Winkeln. Man findet ebenfalls leicht

$$z = \frac{\frac{1}{2}b^2 \sin A \cdot c \sin C}{\sin B}.$$

VI. Der Inhalt eines Vierecks ABCD (Fig. 29) aus seinen beiden Diagonalen $AD = D$, $BC = D'$ und dem von denselben eingeschlossenen Winkel $AOB = \delta$ zu finden. Suchen wir den Flächeninhalt eines jeden der vier Dreiecke, so kommt, wenn wir solche addiren, und die Segmente AO, OD, BO, OC der Diagonalen bezüglich durch a, b, c, d bezeichnen, $z = \frac{1}{2}(ac + ad + bd + bc) \sin \delta$. Hieraus folgt, daß die Flächeninhalte zweier Vierecke gleich groß sind, sobald ihre Diagonalen gleich sind und solche sich unter demselben Winkel schneiden.

Anmerkung. Da $\sin \delta$ für $\delta = 90°$ ein Maximum wird, so ist unter allen Vierecken mit den nämlichen Diagonalen dasjenige am größten, in welchem die Diagonalen sich unter einem rechten Winkel treffen.

VII. Es sei AB (Fig. 27) = a die Seite eines regelmäßigen Polygons, n die Zahl seiner Seiten, α das Gradmaß des Centriwinkels $AOB = 2AOI = \frac{360}{n} = \alpha$. Das rechtwinklige Dreieck OIA gibt IO $= AI \tang IAO = \frac{1}{2} a \cot(\frac{1}{2}\alpha)$. Nimmt man nmal das Dreieck $AOB = AI \times IO$, so erhält man den Flächeninhalt des regelmäßigen Polygons $= \frac{1}{4} na^2 \cdot \cot(\frac{1}{2}\alpha)$. Man hat ferner Dreieck $AOB = R \sin AOI \times R \cos AOI = \frac{1}{2} \cdot R^2 \sin \alpha$. Zieht man diesen Flächeninhalt von dem des Kreisausschnittes $AOBC = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ ab, so bleibt für den Flächeninhalt des Kreisabschnittes $\frac{1}{2}R^2 \left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin \alpha\right)$.

VIII. Den Flächeninhalt einer Zone DFNG (Fig. 22) zu finden. Diese Fläche z ist = Umkreis CD × IK (Geometrie §. 138). Wir haben nun, wenn R den Radius darstellt:

1) Umkreis $CD = 2\pi R$; 2) $CI = R \sin \alpha$; 3) $CK = R \sin \alpha'$; α und α' bezeichnen die in Graden ausgedrückten Breiten der Punkte D und F, nämlich $\alpha = OD$, $\alpha' = OF$. Folglich $IK = CK - CI = R(\sin \alpha' - \sin \alpha)$; mithin

$$z = 2\pi R^2(\sin \alpha' - \sin \alpha) = 4\pi R^2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha).$$

Man nimmt α' negativ, wenn der Punkt F auf der andern Seite des Aequators OC liegt, d. h. wenn der Aequator zwischen den beiden Grundflächen der Zone liegt.

IX. Es sei r der Radius OF (Fig. 4) des dem Dreiecke ABC eingeschriebenen Kreises. Da in dem Dreieck AOF der Winkel OAF die Hälfte von $CAB = A$ macht, so ist $OF = AF \cdot \tan \frac{1}{2} A$, oder $r = (p-a) \tan \frac{1}{2} A$, wenn p den halben Umkreis des Dreiecks ABC bezeichnet. Dieser Werth ist einfacher als der im §. 2 mitgetheilte, wo für den Flächeninhalt z des Dreiecks ABC die Gleichung $z = pr$ gefunden wurde. Durch die Einführung des Werthes von r erhält man $z = p(p-a) \tan \frac{1}{2} A$. Diese Gleichungen geben zu verschiedenen Aufgaben Anlaß.

X. Es sei $AB = k$ eine Sehne (Fig. 27), der zugehörige Bogen $ACB = a$, R der Radius AO. Das rechtwinklige Dreieck AOI gibt $AI = R \sin \frac{1}{2} a$, mithin $k = 2R \sin \frac{1}{2} a$. Mittelst dieser Gleichung wird das Gradmaß eines Bogens a gefunden, wenn man seine Sehne k kennt, und umgekehrt. Man sehe §. 30, was die Länge dieses Bogens anlangt.

Diese Formel gestattet eine wichtige Anwendung. Man kann sich nämlich des Transporteurs, um einen Winkel von einer gegebenen Anzahl Graden zu construiren, nur bedienen, wenn es keine große Genauigkeit gilt. Nehmen wir nun einen willkührlichen Radius AO, dessen Länge durch einen Maßstab, auf welchem die gleichen Theile sehr eng zusammengezogen sind, gemessen ist; so gibt unsere Gleichung an, wie viel solcher Theile die Sehne k enthält. Tragen wir daher auf den Bogen ACB eine Zirkelöffnung $AB = k$, ziehen dann AO und OB, so wird AOB der verlangte Winkel sein. Der Fehler dieser Construction liegt allein in der Dicke der Theilstriche. Wir haben unter dem Titel Goniometrie eine sehr genaue Tafel über die Längen der Sehnen herausgegeben.

XI. Es seien φ der Winkel zweier Seitenflächen irgend einer dreiseitigen Pyramide, c die gemeinschaftliche Seite jener Grenzflächen, h und h′ die auf diese Seite von den Scheiteln der gegenüberliegenden Winkeln gefällten Senkrechten, mithin die Höhen der Seitenflächen. Die Basis der Pyramide hat zum Maß $\frac{1}{2}ch$; ferner ist $h' \sin \varphi$ die Höhe der Pyramide; das Volumen des Körpers ist demnach gleich $\frac{1}{6} ch\, h' \sin \varphi$.

XII. Es sei ABCD ein Viereck (Fig. 5); wir bezeichnen die

Seiten desselben durch a, b, c, d und die Winkel, welche die Seiten a und b, b und c..., bilden, durch (ab), (bc)... Projectiren wir AD, DC und BC auf AB, so haben wir AE = d cos (ad), EF = c cos (ac), FB = b cos (ab). Nun ist AB = a = AE + EF + FB, mithin

$$a = b\cos(ab) + c\cos(ac) + d\cos(ad).$$ Ebenso ist
$$b = a\cos(ab) + c\cos(bc) + d\cos(bd);$$
$$c = a\cos(ac) + b\cos(bc) + d\cos(cd);$$
$$d = a\cos(ad) + b\cos(bd) + c\cos(cd);$$

wobei zu bemerken ist, daß die abzuziehenden Projectionen negative Cosinus zu Factoren haben.

Multipliciren wir diese Gleichungen respektive mit a, b, c, d, und ziehen darauf von dem ersten Produkt die Summe der drei andern ab; so erhalten wir

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2[bc\cos(bc) + bd\cos(bd) + cd\cos(cd)];$$

Wir finden auf gleiche Weise:

$$c^2 = a^2 + b^2 + d^2 - 2[ab\cos(ab) + ad\cos(ad) + bd\cos(bd)];$$

und ebenso mit den übrigen Seiten.

Die nämliche Rechnung ist auf das Fünfeck u. s. w. anwendbar. **Ueberhaupt ist in jedem ebenen Polygon das Quadrat irgend einer Seite gleich der Summe der Quadrate der andern Seiten, weniger dem doppelten Produkte aus denselben je zwei und zwei mit dem Cosinus des von ihnen gebildeten Winkels.**

Anwendung der trigonometrischen Sätze auf einige andere Aufgaben.

§. 47. Die trigonometrischen Linien werden öfters zur Auflösung der Gleichungen und zur Bildung von Transformationen benutzt, um die Formeln für eine logarithmische Berechnung einzurichten. Wir wollen hierüber einige Beispiele geben.

I. Man soll durch Logarithmen die Summe von mehreren Größen finden. Es sei deshalb $y = A(a + b)$, in welcher Gleichung a und b als ziemlich verwickelte algebraische Ausdrücke gelten, bei denen der Gebrauch der Logarithmen seine Vorzüge haben könnte. Man setze $\tan z = \frac{b}{a}$.... (1) und eliminire a; hierdurch $y = Ab\left(\frac{1}{\tan z} + 1\right)$

$= Ab\left(\frac{\cos z + \sin z}{\sin z}\right)$. Nun ist $\sin 45^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; mithin $\sin 45^\circ \sqrt{2} = \cos 45^\circ \sqrt{2} = 1$; folglich, wenn man den Zähler des vorigen Ausdrucks mit diesen ersten Gliedern multiplicirt, $y = \frac{ab\sqrt{2}}{\sin z} \sin(z + 45^\circ)$... (2), weil $(\sin z \cos 45^\circ + \cos z \cdot \sin 45^\circ) = \sin(z + 45^\circ)$. Die Gleichung (1) gibt den Bogen z, die Gleichung (2) dann die Größe y. — Für $x = A(a+b+c)$, setze man hier oben $A = 1$, wodurch $y = a + b$ und $x = A(y+c)$, ein Ausdruck, welcher nach derselben Methode behandelt werden kann.

Anmerkung. Auf diese Weise ist es möglich, ein irrationales Binom auf ein Monom zu reduciren. Es sei $y = A \cdot \sqrt{(a+b)}$. Setzt man $\frac{b}{a} = \tang^2 \varphi$, so ist $y = \frac{A\sqrt{a}}{\cos\varphi}$. — Für die Gleichung $y = A\sqrt{(a-b)}$ erhält man $y = A\sqrt{(a \cdot \sin\varphi)}$, wenn $\sqrt{\frac{b}{a}} = \cos\varphi$ gesetzt wird.

II. Man soll eine Gleichung vom zweiten Grade durch Logarithmeln auflösen.

Erster Fall. Es sei $x^2 + px = q$, q ist positiv. Man hat $x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} = -\tfrac{1}{2}p\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right)$. Setzt man nun $\tang\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$... (1), aus welcher Gleichung der Bogen φ bestimmt wird; so erhält man durch Elimination von p: $x = -\frac{\sqrt{q}}{\tang\varphi}(1 \pm \sec\varphi)$ $= -\sqrt{q}\,\frac{(\cos\varphi \pm 1)}{\sin\varphi}$.

Für das Zeichen — hat man $x = \sqrt{q} \cdot \tang\tfrac{1}{2}\varphi$.... (2); für das Zeichen + dagegen $x = -\sqrt{q} \cdot \cot\tfrac{1}{2}\varphi$ (3), weil $\frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} = \tang\tfrac{1}{2}\varphi$ und $\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = \tang\tfrac{1}{2}\varphi$.

Zweiter Fall. Es sei $x^2 + px = -q$, q ist stets positiv. Man setze $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ ... (4); es setzt dies voraus, daß $p > 2\sqrt{q}$ oder $\tfrac{1}{4}p^2 > q$, erforderliche Bedingung, damit die Wurzeln reell sind.

(Siehe niedere Algebra §. 49). Wird p zwischen der Gleichung (4) und $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ eliminirt, so kommt $x = -\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}(1 \pm \cos\varphi)$ $= -\sqrt{q} \cdot \tang\frac{1}{2}\varphi \ldots (5)$, wenn man das Zeichen — nimmt; das Zeichen + gibt $x = -\sqrt{q} \cdot \cot\frac{1}{2}\varphi \ldots (6)$.

In beiden Fällen führt man, wenn p negativ ist, sein Zeichen in die Ausdrücke (1) oder (4) ein, wodurch sie negativ werden, und befolgt dann die in §. 31 vorgeschriebene Regel. Man kann übrigens auch p positiv nehmen und die Zeichen der beiden Wurzeln ändern.

Anmerkung. Das Produkt $(x - \tang\frac{1}{2}\varphi\sqrt{q})(x + \cot\frac{1}{2}\varphi\sqrt{q})$ muß die Gleichung $x^2 + px - q = 0$ geben. (Siehe niedere Algebra §. 47.) Nimmt man die Multiplication im gedachten Produkte vor, so kommt $x^2 + (\cot\frac{1}{2}\varphi - \tang\frac{1}{2}\varphi)\sqrt{q} \cdot x - q$ $= x^2 + 2\cot\varphi\sqrt{q} \cdot x - q$, weil $\cot\frac{1}{2}\varphi - \tang\frac{1}{2}\varphi = 2\cot\varphi$. Nun ist $\cot\varphi = \frac{p}{2\sqrt{q}}$, weil Gleichung (1) $\tang\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ gibt. Also $(x - \tang\frac{1}{2}\varphi\sqrt{q})(x + \cot\frac{1}{2}\varphi\sqrt{q}) = x^2 + px - q$.

Führt man die Multiplication in dem Produkte $(x + \tang\frac{1}{2}\varphi\sqrt{q})$ $(x + \cot\frac{1}{2}\varphi\sqrt{q})$ aus, so kommt $x^2 + (\cot\frac{1}{2}\varphi + \tang\frac{1}{2}\varphi)\sqrt{q} \cdot x + q$ $= x^2 + px + q$, weil $\cot\frac{1}{2}\varphi + \tang\frac{1}{2}\varphi = 2\,\mathrm{cosec}\,\varphi = \frac{2}{\sin\varphi}$.

III. Man soll die Gleichung $n\sin x + c\cos x = b$ auflösen. Man setze $\tang\varphi = \frac{c}{n} \ldots (1)$, und eliminire c; dadurch kommt

$$b = n(\tang\varphi\cos x + \sin x) = n\left(\frac{\sin\varphi\cos x + \sin x\cos\varphi}{\cos\varphi}\right);$$

daraus $\sin(\varphi + x) = \frac{b}{n}\cos\varphi \ldots (2)$. Die Gleichung (1) bestimmt den Bogen φ, die Gleichung (2) den Bogen $(\varphi + x)$, mithin die Unbekannte x.

Anmerkung. Es werde folgende Aufgabe vorgelegt: Die Seiten $AC = b$, $AB = c$ eines Dreiecks ABC (Fig. 7) sind gegeben, der von ihnen eingeschlossene unbekannte Winkel $A = x$ ist von der Art, daß das Segment CD dem von einem gegebenen Punkt F gefällten Perpendikel gleich sei; es soll daraus das Dreieck construirt werden. Setzt man die bekannte Größe $AF = n$, so ist $FE = n\sin x = CD$, $AD = c\cos x$; die Glei-

chung AD + DC = b kommt hiernach auf die eben behandelte Gleichung zurück.

IV. Die Gleichung $\sin(x + k) = m \sin(x + l)$ aufzulösen. Man setze $x + \frac{1}{2}(k + l) = y$; hieraus

$$\frac{\sin[y + \frac{1}{2}(k - l)]}{\sin[y - \frac{1}{2}(k - l)]} = m = \frac{\tan y + \tan \frac{1}{2}(k - l)}{\tan y - \tan \frac{1}{2}(k - l)}.$$

Daraus findet man $\tan y = \frac{1 + m}{1 - m} \tan \frac{1}{2}(l - k)$. Diese Gleichung gibt y, worauf dann x gefunden wird. Setzt man $m = \tan \varphi$, so ist $\frac{1 + m}{1 - m} = \frac{1 + \tan \varphi}{1 - \tan \varphi} = \tan(45^\circ - \varphi)$, und $\tan y = \tan(45^\circ - \varphi) \cdot \tan \frac{1}{2}(l - k)$.

Anmerkung. Es seien die Basis AB (c) des Dreiecks ABC (Fig 32) und das Verhältniß $\frac{a}{b} = m$ der beiden andern Seiten BC, AC gegeben; man soll das Dreieck construiren, wenn man weiß, daß durch respektive Hinwegnahme der gegebenen Winkel CAD = k und CBD = l von den unbekannten Winkeln A und B ein gleichschenkliges Dreieck ABD entsteht. Wir nehmen als Unbekannte den Winkel DAB = DBA = x. Die Proportionalität der Sinus der Winkel CAB $(x + k)$ und CBA $(x + l)$ zu den gegenüberliegenden Seiten a und b, deren Verhältniß m bekannt ist, liefert uns die oben behandelte Gleichung, aus welcher der Werth von x herzuleiten ist.

Diejenigen, welche in der rechnenden Geometrie in der Ebene, diesem wichtigen Theil der ganzen Mathematik, einige Fertigkeit zu erlangen wünschen, dürfen nicht unterlassen, sich in der Auflösung von Beispielen und Aufgaben mancherlei Art zu üben. Wir können deshalb folgende Werke empfehlen:

1) Sammlung geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch. Erster Theil. Berlin, bei H. Fröhlich.

2) Praktische Uebungen für angehende Mathematiker, von Dr. E. S. Unger. 2 Bände. Leipzig, bei F. Brockhaus.

Drittes Kapitel.

Gleichungen der geraden Linien und des Kreises.

Von der geraden Linie.

§. 48. Unter der Gleichung einer Linie BMZ (Fig. 34) versteht man die zwischen den Coordinaten x und y jedes ihrer Punkte statt findende Relation, in der Art, daß, wenn man sich die Ordinate PM durch die verschiedenen Punkte der Achse Ax entlang parallel fortbewegt, und dabei gleichzeitig ihre Länge mit jener der Abscisse dergestalt verändert denkt, damit die Gleichung zwischen x und y stets befriedigt ist, der Endpunkt M der Ordinate die Curve so beschreiben wird. Man kann die Gleichung der Curve als zwei Unbekannte enthaltend ansehen, wovon eine willkührlich ist. Nimmt man für x einen beliebigen Werth a, und ergibt sich daraus für y ein reeller Werth b; so gehört der Punkt, dessen Coordinaten a und b sind, und den wir in der Folge durch den Punkt (a, b) bezeichnen wollen, der in Frage stehenden Curve an. Dasselbe gilt, wenn $x = a'$ den Werth $y = b'$ liefert u. s. w. Unsere unbestimmte Gleichung lehrt auf diese Weise eine unendliche Anzahl von Punkten, deren Gesammtheit die Curve selbst ausmacht, kennen. Man kann dieses Verfahren anwenden, um verschiedene Punkte derselben zu finden, um ihre Gestalt und sonstige Eigenschaften, welche sie in ihrem Laufe darbietet, daraus herzuleiten. Es wird dies künftighin häufig vorkommen.

So z. B. ist $y = b$ offenbar die Gleichung einer Geraden MN (Fig. 33), welche zur Achse Ax parallel läuft, wenn $AQ = b$ ist. $y = o$ ist die Gleichung der Achse der x selbst. Ebenso ist $x = a$ die Gleichung der zur Achse Ay parallelen Geraden, wenn $AP = a$ ist; und $x = o$ die Gleichung dieser Achse selbst.

Anmerkung. Eine Curve kann einer mathematischen Betrachtung nur insofern unterworfen werden, als sie einem bestimmten allgemeinen Gesetze gehorcht. Die Gleichung einer solchen

geregelten Curve wird jedesmal gefunden, wenn man irgend eine ihrer Eigenschaften, oder die Umstände ihrer Construction analytisch ausdrückt.

§. 49. Wir wollen zuvörderst die Gleichung der geraden Linie suchen.

1) Geht die Gerade durch den Ursprung, wie z. B. AN (Fig. 35), so wird immer sein $\frac{DC}{AC} = \frac{PN}{AP} = \ldots$, von welchen Punkten D, N..., man auch die Ordinaten DC, PN..., herabfällen mag. Bezeichnet man daher durch a das beständige Verhältniß aus der Ordinate in die entsprechende Abscisse, so hat man für die Gerade MN die Gleichung $y = ax$.

In dem Fall, daß die Coordinaten rechtwinklig sind, hat man in irgend einem dieser Dreiecke die Relation: $PN = AP \cdot \tang A$. Die Größe a drückt sonach die Tangente des Winkels, unter welchem die Abscissenachse von der Geraden geschnitten wird, aus. In dem Maße, daß der Winkel NAP wächst, nimmt a zu. Macht die Gerade, wie z. B. AN', einen stumpfen Winkel mit den positiven x, so wird a negativ, und die Gleichung erhält die Form $y = -ax$; hier ist a die Tangente des Winkels N'AE. Man sieht in der That, daß die positiven Abscissen negativen Ordinaten entsprechen, und umgekehrt.

Ist der Coordinatenwinkel kein rechter, so gibt das Dreieck NAP die Gleichung: $\frac{\sin NAP}{\sin ANP} = \frac{y}{x} = a$; in diesem letztern Falle drückt die Größe a das Verhältniß der Sinus der Winkel, welche die Gerade mit den Achsen der x und y macht, aus. Dies Verhältniß wird mit dem Zeichen — behaftet sein, wenn die Gerade eine solche Lage wie AN' angenommen hat.

2) Geht die Gerade, wie z. B. BM, nicht durch den Ursprung, so sieht man, daß wenn AN zu BM parallel läuft, die neue Ordinate PM oder y von der vorigen PN oder $y = ax$ nur darin unterschieden ist, daß sie dieselbe um $MN = b$ übertrifft. Man hat folglich $y = ax + b$; wo b negativ sein würde, wenn die Gerade eine solche Lage wie B'M' hätte.

Anmerkung. Die Gleichung der Geraden $y = ax + b$ geht, wenn man statt a den Abschnitt derselben $AE = c$ auf der Abscissenachse einführt, in folgende über: $y = -\frac{b}{c}x + b$,

weil $a = -\frac{b}{c}$ ist, welcher letztern Gleichung man auch die symmetrische Form $\frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1$ geben kann.

§. 50. Die in der Gleichung der Geraden vorkommenden Größen x und y heißen veränderlich (variabel), a und b dagegen beständig (constant). Man sieht jedoch ein, daß a und b sich ebenfalls ändern können, was statt findet, sobald die Gerade BM eine andere Lage erhält. Die Gleichung $y = ax + b$ gehört allen geraden Linien an; der bestimmte Werth der zwei constanten Größen a und b unterscheidet die jedesmalige gerade Linie von allen andern.

Die allgemeine Gleichung vom ersten Grade, $Ay + Bx + C = o$ wird die Form $y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A}$ annehmen, wofür man $y = ax + b$ schreiben kann. Machen wir nun $AB = b$ (Fig. 35), und ziehen BM dergestalt, daß $a = \text{tang } BEA$ oder $= \frac{\sin NAP}{\sin ANP}$, je nachdem die Coordinaten rechtwinklig oder schiefwinklig sind; so wird $y = ax + b$ die Gleichung der Geraden BM sein. Hieraus ist ersichtlich, daß jede Gleichung von der ersten Dimension einer geraden Linie angehört, welche zu ziehen weiter keine Schwierigkeit hat.

Man kann dieselbe auch dadurch verzeichnen, daß man zwei ihrer Punkte bestimmt. Da nun für den Punkt B die Abscisse Null ist, so erhält man, wenn man $x = o$ setzt, die Ordinate des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Ordinatenachse. Ebenso gibt $y = o$ den Durchschnittspunkt E der Geraden mit der Abscissenachse. Dies ist übrigens ganz allgemein, die Linie mag gerade oder krumm sein. Mit Hülfe dieses Satzes läßt sich die Gerade leicht ziehen. $x = o$ gibt nämlich $y = b = AB$; $y = o$ liefert ferner $x = -\frac{b}{a} = AE$. Die Gerade EB, welche durch die auf solche Weise bestimmten Punkte E und B geht, wird die gesuchte Linie sein. — Ginge aber die Linie durch den Ursprung, oder wäre $y = ax$, so würde das letzte Verfahren nur diesen Punkt allein angeben. Setzt man jedoch $x = 1 = CA$, so kommt $y = a = CD$. — Um die Lage einer Geraden aus der ihr zugehörigen Gleichung zu erkennen, wird es gut sein, sich in der Construction von Geraden, welche gegebenen Gleichungen, wie

$2y + x = 2$, $y = -3 + x$, $y = - - x - 1$, $\frac{1}{2}x + 5y = -4$ u. s. w., entsprechen, zu üben.

Anmerkung. Da jede Gleichung zwischen x und y, welche in Rücksicht auf beide Veränderlichen von der ersten Dimension ist, eine gerade Linie vorstellt; so nennt man solche Gleichungen auch lineäre Gleichungen.

§. 51. **Die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte geht.** Es seien (x', y') der erste, und (x'', y'') der zweite Punkt. Die gesuchte Gleichung hat die Form $y = ax + b$, wo a und b noch unbekannte, constante Größen sind. Da die Gerade durch den Punkt (x', y') geht, so muß man $y = y'$ finden, wenn man $x = x'$ setzt, oder aus $y = ax + b$ wird $y' = ax' + b$. Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so verschwindet b, und es entsteht:

$$y - y' = a\,(x - x') \;.\;.\;.\;.\; (1).$$

Diese letztere Gleichung gehört allen geraden Linien an, welche durch den Punkt (x', y') gehen und nur durch den Werth von a, d. h. durch ihre Richtung von einander unterschieden sind.

Da unsere Gerade aber auch durch den Punkt (x'', y'') geht, so erhält man aus demselben Grunde wie vorhin $y'' - y' = a(x'' - x')$; daraus $a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$, und $y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\,(x - x')$.

§. 52. **Den Winkel zu finden, welchen zwei gegebene Geraden einschließen.** Es seien $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ die Gleichungen der beiden geraden Linien. Ist BC die erste Gerade (Fig. 36), α der Winkel B, welchen sie mit der Achse der x bildet, ferner DC die zweite Gerade und α' der Winkel, welchen sie oder ihre Parallele BE mit Ax macht; so wird der gesuchte Winkel $V = \alpha - \alpha'$ sein. Man hat daher $\operatorname{tang} V = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\alpha'}{1 + \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\alpha'} = \frac{a - a'}{1 + aa'} \;.\;.\;.\;.\; (2)$. Ist $a = a'$, so sind die beiden Geraden zu einander parallel, weil $V = o$, was sich übrigens von selbst versteht. Hat man $aa' + 1 = o$, so ist $\operatorname{tang} V = \infty$, der Winkel V ist sonach ein rechter. Die Bedingungsgleichung für den Parallelismus zweier Geraden ist also $a = a' \;.\;.\; (3)$, und die für das Senkrechtsein $aa' + 1 = o \;.\;.\;.\; (4)$.

Anmerkung. Im Fall der Coordinatenwinkel kein rechter, sondern $=\varphi$ ist, hat man $a=\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}$ und $a'=\frac{\sin\alpha'}{\sin(\varphi-\alpha')}$ wenn man durch α und α' die Winkel bezeichnet, unter welchen die Abscissenachse von den Geraden geschnitten wird. Aus den beiden letztern Gleichungen folgt $\tan\alpha=\frac{a\sin\varphi}{1+a\cos\varphi}$, $\tan\alpha'=\frac{a'\sin\varphi}{1+a'\cos\varphi}$. Diese Werthe in $\tan V=\frac{\tan\alpha-\tan\alpha'}{1+\tan\alpha\cdot\tan\alpha'}$, eingeführt, geben $\tan V=\frac{(a-a')\sin\varphi}{1+aa'+(a+a')\cos\varphi}$, welches für $\varphi=90^\circ$ wieder in $\tan V=\frac{a-a'}{1+aa'}$ übergeht. Ist $a=a'$, dann $V=o$, mithin die Geraden zu einander parallel. Ist $1+aa'+(a+a')\cos\varphi=o$, dann $V=90^\circ$, mithin die Geraden auf einander senkrecht.

§. 53. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die zu einer andern Geraden parallel laufe, oder auf derselben senkrecht stehe, oder mit ihr einen bekannten Winkel mache. Es sei $y=ax+b$ die Gleichung der gegebenen, und $y=a'x+b'$ die der gesuchten Geraden; es handelt sich also darum, a' und b' zu bestimmen. Da die Gerade durch den gegebenen Punkt (x', y') gehen soll, so hat man die Gleichung $y-y'=a(x-x')$; es bleibt demnach a' zu finden übrig.

1) Soll die zweite Gerade der erstern parallel sein, so ist $a=a'$, mithin die Gleichung (1) im vorletzten Paragraphe die gesuchte Gleichung.

2) Sollen die Geraden auf einander senkrecht stehen, so hat man $aa'+1=o$; hieraus $a'=-\frac{1}{a}$ und $y-y'=-\frac{1}{a}(x-x')\ldots(5)$.

3) Sollen die Geraden einen bestimmten Winkel, dessen Tangente $=m$ sei, einschließen; so setzt man $\tan V=m$ in der Gleichung (2), wodurch entsteht $a'=\frac{a-m}{am+1}$ und $y-y'=\frac{a-m}{am+1}(x-x')$ .... (6).

Ist z. B. $m=1$, so erhält man für eine Gerade, welche mit der gegebenen einen Winkel von 45° macht, die Gleichung

$$(a+1)(y-y')=(a-1)(x-x').$$

§. 54. **Den Durchschnittspunkt zweier gegebenen Geraden zu finden.** Es seien $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ die Gleichungen der gegebenen Geraden. Es kann wohl x für diese Linien in ihrer ganzen Ausdehnung einerlei Werth haben, y wird aber für sie verschieden sein. In dem Punkte allein, wo sie sich treffen, werden x und y in beiden Gleichungen einerlei Werth haben. Um die Coordinaten des Durchschnitts zu finden, braucht man daher nur die Elimination vorzunehmen. Auf diese Weise erhält man $x = \frac{b' - b}{a - a'}$, $y = \frac{ab' - ba'}{a - a'}$.

Ueberhaupt findet man durch Elimination von x und y mittelst der Gleichungen irgend zweier Curven die Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte. Dies ist auch der Grund, weshalb, wenn $y = 0$, oder $x = 0$ gesetzt wurde, wir die Durchschnittspunkte der Geraden mit der Achse der x oder der Achse der y erhielten; denn diese Gleichungen sind nicht anders als die der Achsen.

Anmerkung. Man sieht, daß die Werthe von x und y desto größer werden, d. i. daß der Durchschnittspunkt desto weiter von den Achsen entfernt liegt, je kleiner $a - a'$ wird, und daß sie unendlich groß werden, wenn $a = a'$ ist, d. h. wenn die gegebenen Linien parallel sind.

§. 55. **Den Abstand zweier gegebenen Punkte zu finden.** Es seien $M(x', y')$ der eine, und $N(x'', y'')$ der andere Punkt (Fig. 37). Ziehen wir MR parallel zu Ax, so gibt das rechtwinklige Dreieck NMR, $MN^2 = MR^2 + RN^2 = (AQ - AP)^2 + (NQ - MP)^2$. Für den gesuchten Abstand δ hat man folglich den Ausdruck $\delta = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2]}$.... (7). Für den Abstand des Punktes M vom Ursprung hat man $\delta = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}$.

Liegen die beiden Punkte auf einer durch die Gleichung $y = ax + b$ bestimmten Geraden BN, so müssen x', y' und x'', y'' dieser Gleichung Genüge leisten; mithin $y' = ax' + b$ und $y'' = ax'' + b$. Daraus folgt $\delta = (x'' - x')\sqrt{(1 + a^2)}$.

Anmerkung. Schneiden sich die Coordinatenachsen unter einem schiefen Winkel φ, so erhält man für die Entfernung der beiden Punkte (x', y') und (x'', y'') den Ausdruck

$$\delta = \sqrt{[(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + 2(x''-x')(y''-y')\cos\varphi},$$

der in den vorigen übergeht, wenn $\varphi = 90°$ ist.

§. 56. **Die Entfernung eines bestimmten Punktes von einer gegebenen Geraden zu finden.** Es sei $y = ax + b$ die Gleichung der Geraden BC (Fig. 38), M oder M' der gegebene Punkt (x', y'). Man muß erstens die Senkrechte MM' auf BC fällen, zweitens den Durchschnittspunkt N dieses Perpendikels mit der gegebenen Geraden bestimmen; drittens die Entfernung MN oder $M'N = \delta$ suchen. Diese verschiedenen Operationen wollen wir nun analytisch ausführen. Die Gleichung der durch den Punkt (x', y') gehenden und zugleich auf der Geraden BC senkrecht stehenden Linie wird $y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$ sein. Die Elimination von x und y zwischen dieser und der gegebenen Gleichung gibt die Coordinaten des Durchschnittspunktes N. Die so gefundenen Werthe führt man endlich für x'' und y'' in den Ausdruck $\delta = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2]}$ ein.

Da in der letzten Formel nur die Differenzen $x'' - x'$ und $y'' - y'$ vorkommen, so wird die Rechnung einfacher, wenn man die Gleichung $y = ax + b$ auf folgende Form bringt:

$$y - y' = a(x - x') + b + ax' - y',$$

die gegen die Gleichung: $y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$ gehalten,

$$x - x' = a\frac{(y' - ax' - b)}{1 + a^2}, \text{ und } y - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2} \text{ gibt.}$$

Die Summe der Quadrate dieser Größen ist $\left(\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2}\right)^2 (1 + a^2)$; für die gesuchte Entfernung oder Länge MN oder M'N des Perpendikels kommt daher $\delta = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{(1 + a^2)}}$.

Anmerkung. Diese Größe kann wegen des Wurzelausdrucks $\sqrt{(1 + a^2)}$ das doppelte Zeichen $\pm$ annehmen. Da die Größe δ ihrer Natur nach positiv ist, so wählt man das Zeichen stets dergestalt, daß dieser Anforderung Genüge geschieht. (Siehe niedere Algebra §. 17.) Für die Abscisse x' hat nun die Ordinate des Punktes R oder R' der Geraden BC den Werth $y = ax' + b$, welcher $<$ oder $>$ y', je nachdem der Punkt in M oder M', d. h. oberhalb oder unterhalb der Geraden BC liegt. Man wird daher im zweiten Fall $-\sqrt{(1 + a^2)}$ nehmen, was $\delta = \frac{ax' + b - y'}{\sqrt{(1 + a^2)}}$ gibt.

Im Falle der Coordinatenwinkel kein rechter, sondern gleich φ ist, findet man für die Gleichung der Senkrechten: $y - y' = -\frac{1 + a\cos\varphi}{a + \cos\varphi}(x - x')$. Aus der Verbindung dieser Gleichung mit der gegebenen Geraden $y = ax + b$ erhält man durch Elimination:

$$x'' - x' = -\frac{(a + \cos\varphi)(ax' + b - y')}{1 + 2a\cos\varphi + a^2},$$

$$y'' - y' = \frac{(1 + a\cos\varphi)(ax' + b - y')}{1 + 2a\cos\varphi + a^2}.$$

Führt man diese Werthe in den Ausdruck

$\delta = \sqrt{[(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + 2(x''-x')(y''-y')\cos\varphi]}$ ein,

so findet man $\delta = \pm\frac{(ax' + b - y')\sin\varphi}{\sqrt{(1+2a\cos\varphi+a^2)}}$; wo das obere oder untere Zeichen genommen wird, je nachdem die Größe $ax'+b-y'$ positiv oder negativ ist.

§. 57. Im Allgemeinen sind die auf die gerade Linie Bezug habenden Probleme von zweierlei Art.

1) Entweder ist die Gerade gegeben, und man sucht einen ihrer Punkte (x', y'), der einer gewissen Bedingung genüge. In der Gleichung $y' = ax' + b$ sind alsdann a und b bekannte Größen; eine zweite Relation zwischen x' und y' erlangt man dadurch, daß man die Bedingung, welche der fragliche Punkt erfüllen soll, in die algebraische Sprache überträgt. Die Elimination lehrt hierauf die Coordinaten kennen. Hätte man mehrere Geraden und verschiedene gegebene Bedingungen, so würde der Gegenstand auf ähnliche Art behandelt werden.

2) Oder man sucht eine Gerade, welche durch ihre Lage gewissen Anforderungen entsprechen soll. In diesem Fall sind in der Gleichung $y = ax + b$ die Größen a und b unbekannt, welche der Aufgabe gemäß zu bestimmen sind. Uebersetzt man die gegebenen Bedingungen in die algebraische Sprache, so erhält man die zur Bestimmung von a und b erforderlichen Gleichungen, deren Anzahl sich nur auf 2 belaufen kann, es sei denn, daß sie noch neue Unbekannte mit sich führen.

§. 58. Wir wollen nun vorstehende Prinzipien auf einige Beispiele anwenden.

I. Einen Winkel zu halbiren, den zwei gegebene Geraden AB, AC (Fig. 39) mit einander machen. Man lege zwei rechtwinklige

Achsen Ax, Ay durch den Durchschnittspunkt A der beiden Geraden, deren Gleichungen $y = ax$ und $y = bx$ sind, wo a und b bekannte Größen darstellen. Es sei $y = kx$ die Gleichung der gesuchten Geraden AD; es handelt sich also darum, k zu finden. Der Werth der Tangente des Winkels DAB ist $\frac{a-k}{1+ak}$ (§. 53), und der der Tangente des Winkels DAC ist $\frac{k-b}{1+bk}$; hieraus folgt $\frac{a-k}{1+ak} = \frac{k-b}{1+bk}$, oder $k^2 - \frac{2(ab-1)}{a+b}k - 1 = o$. Man sucht daraus den Werth von k und substituirt ihn in $y = kx$. Stellen k' und k'' die beiden reellen Wurzeln dar, so hat man $k'k'' + 1 = o$; was anzeigt, daß die beiden gefundenen Linien AD, AE sich unter einem rechten Winkel schneiden (§. 52). Gingen die Achsen nicht durch den Punkt A, so wäre die gesuchte Gleichung $y - y' = k(x - x')$, wo k den Werth wie oben hat, und x', y' die Coordinaten des Durchschnittspunktes sind. — Nimmt man eine der Geraden AC zur Absciſſenachse, so ist $b = o$, und man erhält einfach $k^2 + \frac{2k}{a} = 1$.

II. Die Geraden AB, Ax (Fig. 40) sind gegeben; man soll den Punkt D (x', y') finden, dergestalt, daß wenn CD parallel zu Ax gezogen wird, AC = CD werde. Man nehme A als Ursprung und Ax zur Absciſſenachse. Es sei $AI = m$, $y = ax$ die Gleichung der Geraden AB und $y = kx$ die der Geraden AD. a ist demnach gegeben; es handelt sich darum, m, x' und y', oder, wenn man will, x' und k zu finden. Man hat $CD = AE - AI = x' - m$, und $AC^2 = m^2 + y'^2$. Die Voraussetzung gibt $m^2 + y'^2 = (x' - m)^2$; folglich $y'^2 = x'^2 - 2mx'$. Nun liegt der Punkt C auf AB, und D auf AD; also $y' = am$ und $y' = kx'$. Durch Elimination von m und y' entsteht $ak^2 + 2k = a$, welche Gleichung zeigt, daß AD den Winkel BAE halbirt (Aufgabe I). Da x' nicht mehr vorkommt, so ist es willkührlich; sämmtliche Punkte der Linie AD genügen hiernach der Aufgabe, die also eine unendliche Anzahl von Auflösungen hat.

III. Die Gleichungen der Senkrechten AF, CE, BD (Fig. 41) zu finden, welche von jedem Scheitel des Dreiecks ABC auf die gegenüber stehende Seite gefällt sind. Die Basis $AC = b$ werde als Absciſſenachse und der Scheitel A als Ursprung betrachtet; der Scheitel B (x', y') bestimmt das Dreieck. Die Gleichung der Geraden AB

ist $y = ax$, wo $a = \frac{y'}{x'}$, weil sie durch den Punkt B geht. Leicht findet man die Gleichung der durch die Punkte $B(x', y')$ und $C(b, o)$ gehenden Geraden, nämlich $y = \frac{y'}{x'-b}(x-b)$. Die Gleichungen der durch den Punkt $C(b, o)$ gezogenen CE und der durch den Ursprung geführten AF haben bezüglich die Form $y = A(x-b)$, $y = Bx$. Die Bedingung, daß sie beziehungsweise auf den vorigen senkrecht stehen, gibt $\frac{Ay'}{x'} + 1 = o$, $\frac{By'}{x'-b} + 1 = o$; mithin sind die Gleichungen der beiden Senkrechten $y = -\frac{x'}{y'}(x-b)$, $y = -\frac{x'-b}{y'}x$. Um ihren Durchschnittspunkt O zu finden, eliminiren wir y zwischen den zwei letzten Gleichungen; man erhält $x = x'$ = der Abscisse AD des Scheitels: der fragliche Punkt O liegt demnach auf der Ordinate BD. Die aus den drei Scheiteln eines Dreiecks gefällten Senkrechten schneiden sich folglich in einem und demselben Punkt. Wenn wir also über AC den Halbkreis AEFC beschreiben, hierauf die Durchschnittspunkte F und E mit A und C verbinden, und durch den Treffpunkt O dieser Linien die Gerade BD ziehen, so wird man die drei Senkrechten erhalten.

IV. Man soll einen Kreis finden, welcher die drei Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 4) berühre. Man suche zuvörderst einen Punkt $O(\alpha, \beta)$, der sich in gleicher Entfernung von AB und AC befinde. Behält man die oben gewählte Bezeichnung bei, so findet man für die Linie AC die Gleichung $y = \frac{y'}{x'}x$. Die Längen OE, OF der Perpendikel sind also (§. 56) $OE = \frac{\alpha y' - \beta x'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}} = \frac{\alpha y' - \beta x'}{\pm b}$, $OF = \beta$.

Man setzt $\pm$, weil der unbekannte Punkt $O(\alpha, \beta)$ oberhalb oder unterhalb AC liegen kann. Die Größen α und β werden durch die einzige Gleichung $OE = OF$, oder $\alpha y' = \beta(x' \pm b)$ bestimmt, was beweist, daß es unendlich viele Punkte O gibt, welche gleich weit von AB und AC abstehen. Wegen der Doppelgleichung $y = \frac{y'}{x' \pm b}$ befinden sich dergleichen Punkte auf zwei Geraden, welche durch den Scheitel A gehen und mit der Basis AB solche Winkel machen,

deren Tangenten gleich $\frac{y'}{x' \pm b}$ sind. Da sich das Produkt dieser Tangenten, wegen $x'^2 + y'^2 = b^2$, auf -1 reducirt; so stoßen die in Frage stehenden Linien unter einem rechten Winkel zusammen; es handelt sich nur darum, die Lage einer derselben AO zu finden. Aus $\tang BAC = \frac{y'}{x'}$ findet man $\cos A = \frac{x'}{\sqrt{(x'^2+y'^2)}} = \frac{x'}{b}$; hieraus ferner $\tang \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{b-x'}{b+x'}} = \frac{y'}{x'+b}$, wenn oben und unten mit $b + x'$ multiplicirt wird: der Winkel OAB ist also $= \frac{1}{2}$BAC, was wir schon aus der Elementar-Geometrie wissen. Die den Winkel BAC halbirende Linie AO und die auf der letztern in A errichteten Senkrechten werden mithin der Ort der gesuchten Mittelpunkte sein. Ziehen wir jetzt die den Winkel C halbirende Linie CO und ihre Senkrechte, und machen das Nämliche in Bezug auf den Punkt B; so werden die Durchschnittspunkte der auf solche Weise gefundenen sechs Geraden, je zwei und zwei mit einander verbunden, vier Punkte geben, welche die Mittelpunkte der gesuchten Berührungskreise sein werden; der eine dieser Kreise ist dem Dreieck eingeschrieben, während die drei übrigen ausserhalb desselben liegen.

Anstatt die drei Perpendikel OD, OE, OF einander gleich zu machen, könnte man den Punkt O auch der Bedingung gemäß bestimmen, daß jene Perpendikel in gegebenen Verhältnissen zu einander ständen.

V. Man soll durch den gegebenen Punkt $M(\alpha, \beta)$ (Fig. 42) die Linie NQ durch den Winkel NBx, dessen Tangente $= a$ ist, ziehen, daß das dadurch entstehende Dreieck NBQ einen bekannten Flächeninhalt habe. Bx und By seien die rechtwinkligen Achsen; $BQ = z$ die Unbekannte. Die Gleichung der durch den Punkt $Q(z, o)$ gezogenen Geraden NQ ist $y = A(x-z)$. Diese Linie geht aber auch durch den Punkt M, mithin $A = \frac{\beta}{\alpha - z}$. Um die Ordinate des Durchschnittspunkts N der Geraden NQ und BN zu erhalten, eliminiren wir x aus den Gleichungen $y = A(x-z)$ und $y = ax$. Wir finden hierdurch $(A-a)\, y = Aaz$; woraus $y = \frac{Aaz}{A-a} = \frac{\beta az}{\beta - a\alpha + az}$.

Ziehen wir nun durch den Punkt M zu BN die Linie MA parallel und setzen AB=m, so ist die Gleichung der letztern $y-\beta = a(x-\alpha)$.

Für den Punkt A hat man $y = o$, was $am = a\alpha - \beta$ gibt. Wird am für $a\alpha - \beta$ in den obigen Werth von y substituirt, so kommt $y = ND = \frac{\beta z}{z - m}$.

Dies vorausgesetzt, welches nun auch der gegebene Flächeninhalt sein mag, so kann man ihn immer in ein Rechteck umwandeln, dessen Höhe $PM = \beta$ und dessen Basis eine bestimmte Linie k ist. Man wird also haben $k\beta = \frac{1}{2}zy$, oder $z^2 - 2kz + 2km = o$. Hieraus ergeben sich zwei leicht zu construirende Auflösungen, wovon die zweite für den Fall gilt, in welchem die Gerade NQ das Supplement des Winkels NBQ schneidet.

Man kann sich noch an folgenden Aufgaben üben:

VI. Die Gleichungen zweier Geraden AB, AC (Fig. 39) sind gegeben; man soll auf denselben die gleichen Stücke AB, AC nehmen, die Länge von BD, der Hälfte der Verbindungslinie BC, berechnen, und den Winkel BAC daraus ableiten. Die Formel muß mit der Formel (2) des §. 52 übereinstimmen.

VII. Man soll für den eben genannten Fall die Gleichung der Verbindungslinie BC und die der auf dieselbe errichteten Senkrechten AD finden. Die Richtung der letztern muß mit derjenigen, welche in der Aufgabe (I) gefunden wurde, übereinstimmen.

VIII. Die aus den Mitten der Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 43) auf dieselben errichteten Senkrechten DO, FO, EO treffen in einem Punkt O zusammen. — Allgemeiner, nimmt man auf den Seiten AB und AC eines Dreiecks ABC die Punkte D und F beliebig, jedoch so, daß sie diese Seiten proportional theilen; so werden die Durchschnittspunkte sämmtlicher, je zwei zusammengehöriger Perpendikel DO und FO auf einer und derselben durch den Scheitel B gehenden Geraden liegen.

IX. Man soll die Gleichungen der Verbindungslinien CD, AF, BE (Fig. 43) der Ecken und Halbirungspunkte der gegenüberstehenden Seiten eines Dreiecks ABC finden, und zeigen, daß sich jene Linien in einem und demselben Punkt G schneiden, welcher auf jeder der gedachten Linien zwei Drittel vom Scheitel des Winkels an gerechnet liegt. — Allgemeiner, nimmt man auf zwei Seiten AB, BC eines Dreiecks beliebige, diesen Seiten aber proportionale Stücke AD, CF; so treffen die Linien CD und AF in einem Punkt G zusammen, welcher

auf der aus dem Scheitel B nach der Mitte der gegenüberliegenden Seite gezogenen Geraden liegt.

X. Ein Winkel ist gegeben; man soll einen Punkt zwischen den Schenkeln dieses Winkels suchen, von welchem die Senkrechten auf jene zwei Schenkel sich wie m zu n verhalten. Man wird finden, daß unendlich viele Punkte die Aufgabe befriedigen, und daß alle diese Punkte in einer Geraden liegen.

Anmerkung. Eine passende Auswahl von Aufgaben und Uebungsbeispielen zu diesem und dem folgenden Kapitel enthalten zum Theil nachstehende Werke:

1) L. Puissant's Sammlung verschiedener Aufgaben und Lehrsätze der Geometrie, aufgelöst und bewiesen durch die algebraische Analysis; aus dem Französischen übersetzt von E. Hahn. Berlin, bei Fröhlich.
2) Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie von L. Magnus. Berlin, bei Duncker und Humblot.

Vom Kreise.

§. 59. Legt man den Ursprung der rechtwinkligen Achsen in den Mittelpunkt des Kreises C (Fig. 44), so ist der Abstand R eines Punktes M seiner Peripherie vom Mittelpunkte gleich $\sqrt{(x^2+y^2)}$. Die Gleichung des Kreises ist demnach $x^2+y^2=R^2 \ldots (1)$, weil für alle Punkte desselben der Abstand R constant ist.

Eine ähnliche Schlußart zeigt, daß $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \ldots (2)$ die Gleichung des Kreises ist, der α und β zu Coordinaten seines Mittelpunktes hat.

Befindet sich der Ursprung im Endpunkt O des Durchmessers, so wird $\alpha=R$, $\beta=o$, wodurch die obige Gleichung in $(x-R)^2+y^2=R^2$ oder vielmehr in $y^2=2Rx-x^2 \ldots (3)$ übergeht.

Im Fall die Coordinaten x und y einen schiefen Winkel φ mit einander bilden, hat das Dreieck CPM den Winkel $P=180°-\varphi$. Die Gleichung des Kreises wird dann sein $x^2+y^2+2xy\cos\varphi=R^2$, wobei der Ursprung im Mittelpunkt liegt und R den Radius darstellt.

Man thut wohl daran, wenn man sich übt, die Gestalt und Eigenschaften einer Curve aus ihrer Gleichung zu entwickeln und sichtbar zu

machen. Obgleich nun diese Dinge für den Kreis bekannt sind, so wollen wir doch dieses Beispiel als vorbereitende Uebung wählen, um zu zeigen, wie und auf welche Art man die Gleichung der Curve benutzen könne, jenes Ziel zu erreichen.

Anmerkung. Die drei in der allgemeinern Gleichung (2) des Kreises vorkommenden constanten Größen α, β, R sind so lange unbestimmt, als sich diese nicht auf einen bestimmten, der Größe und Lage nach bekannten Kreis beziehen. Hieraus folgt, daß zur vollkommenen Festsetzung eines Kreises drei Bedingungen erforderlich sind, und dies lehrt auch die Elementar-Geometrie.

§. 60. Die Gleichung $y = \pm\sqrt{(R^2 - x^2)}$ zeigt, daß jeder Abscisse (Fig. 44) zwei gleiche entgegengesetzte Werthe von y zukommen; daraus folgt, daß die Curve von der Abscissenachse in zwei Theile geschnitten wird, welche sich, wenn man die Figur um Ox umlegt, vollkommen decken. Das Nämliche findet in Bezug auf die Achse der y statt. Für $x = o$ erhält man $y = \pm R$, oder die Durchschnittspunkte y und D der Curve mit der Ordinatenachse. In dem Maße als x wächst, nimmt y ab und wird o für $x = R$. Die Curve rückt also der Achse der x stets näher, welche sie in A trifft. Ueber den Punkt A hinaus kann sich die Linie nicht erstrecken, weil für Werthe von $x > r$ unser y imaginär ausfällt. Diese Merkmale zusammen genommen führen zu einer deutlichen Vorstellung von der Curve.

Die Gleichung jeder durch den Punkt O $(-R, o)$ gezogenen Gerade OM ist $y = a\,(x + R)$, und die Gleichung der durch den Punkt A $(+R, o)$ gehenden Geraden AM ist $y = a'\,(x - R)$. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser Geraden sind $x = \frac{a' + a}{a' - a} R$, $y = \frac{2\,aa'\,R}{a' - a}$. Damit dieser Punkt zugleich auf der Kreislinie liege, muß die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$ durch die eben gefundenen Werthe befriedigt werden. Die Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, daß die beiden Sehnen auf dem Umkreis einander schneiden, ist demnach $aa'(1 + aa') = o$. Aus der letzten Gleichung folgt $a = o$, oder $a' = o$, oder $aa' + 1 = o$. Die beiden ersten Gleichungen sagen, daß die fragliche Bedingung erfüllt wird, wenn eine der Sehnen mit dem Durchmesser zusammenfällt; wir können daraus eigentlich nichts weiter ent-

nehmen. Die dritte dagegen zeigt, daß für eine beliebige Sehne die andere auf derselben senkrecht steht, wenn solche auf der Kreislinie zusammenlaufen.

Aus $y^2 = R^2 - x^2 = (R+x)(R-x)$ und $R+x = OP$, $R-x = AP$ folgt, daß PM mittlere Proportionallinie zwischen OP und AP ist. Für die Länge der Sehne AM hat man den Ausdruck $\sqrt{[y^2+(R-x)^2]}$, oder $AM^2 = 2R^2 - 2Rx = 2R(R-x)$; AM ist demnach mittlere Proportionale zwischen AP und dem Durchmesser AO.

§. 61. Um die Durchschnittspunkte einer Geraden MN mit einem Kreise NKI (Fig. 45) zu finden, brauchen wir blos anzunehmen, daß die Gleichungen $y = ax + b$ und $x^2 + y^2 = R^2$ dieser Linien die nämlichen Unbekannten enthalten. Wird y zwischen beiden Gleichungen eliminirt, so kommt $x = -\frac{ab \pm \sqrt{[R^2(1+a^2)-b^2]}}{1+a^2} = \frac{a\delta \pm \sqrt{(R^2-\delta^2)}}{\sqrt{(1+a^2)}}$, wenn man setzt $\delta = \frac{b}{\sqrt{(1+a^2)}}$ = dem Abstand der Geraden vom Mittelpunkt des vorgelegten Kreises. Es bieten sich hier drei Fälle dar:

1) Wenn $\delta > R$ ist, wird die Wurzelgröße imaginär; die Gerade trifft alsdann den Kreis nicht.

2) Wenn $\delta < R$ ist, wird die Wurzelgröße reell; die Gerade schneidet in diesem Falle die Kreislinie in zwei Punkten. Da man die Achse der x der Secante parallel, d. i. $a = o$, machen kann, so hat man $x = \pm \sqrt{(R^2-b^2)}$. Das doppelte Zeichen $\pm$ beweist, daß der auf eine Sehne senkrecht gefällte Radius dieselben in zwei gleiche Theile theilt.

3) Ist $\delta = R$, so wird die Wurzelgröße Null; die Gerade schneidet dann den Kreis nur in einem einzigen Punkte, oder besser, es wird die Secante zur Tangente. Bezeichnen x', y' die Coordinaten des Berührungspunktes T, so hat man $x' = -\frac{ab}{1+a^2}$, $y' = ax' + b$; woraus $a = -\frac{x'}{y'}$, $b = \frac{x'^2 + y'^2}{y'} = \frac{R^2}{y'}$. Die Gleichung des nach dem Berührungspunkte T (x', y') gezogenen Radius ist $y' = a'x'$, mithin $a' = \frac{y'}{x'}$. Hieraus ergibt sich ferner $aa' = -1$; der gezogene Radius steht also senkrecht auf der Tangente. Die Gleichung $y = ax + b$ geht in $yy' + xx' = R^2 \ldots$ (1). über; es ist dies die Gleichung der an

die Kreislinie durch einen beliebigen Punkt (x', y') derselben gelegten Tangente.

Will man durch einen ausserhalb des Kreises liegenden Punkt M (α, β) eine Tangente MT ziehen, so kommt es darauf an, die Coordinaten x', y', des Berührungspunkts T zu bestimmen. Die Coordinaten x', y' müssen der Gleichung des Kreises, die Coordinaten α, β dagegen der Gleichung der Tangente Genüge thun; man hat also $x'^2 + y'^2 = R^2$, $\beta y' + \alpha x' = R^2$ ... (2). Die Elimination von y' aus diesen beiden Gleichungen führt auf eine Gleichung vom zweiten Grade für x'; woraus folgt, daß es im Allgemeinen zwei Berührungspunkte T und T' gibt, oder mit andern Worten, aus einem ausserhalb des Kreises gegebenen Punkt M können an denselben zwei Tangenten MT, MT' gezogen werden. Anstatt diese Rechnung aber auszuführen, bemerken wir zuvörderst, daß unsere beiden Gleichungen nur für die constanten Coordinaten x', y' des Berührungspunktes gleichzeitig befriedigt werden. Nun stellt die erste der obigen Gleichungen für sich betrachtet, wobei x', y' mithin die allgemeinen Coordinaten bezeichnen, einen Kreis, und die zweite an und für sich betrachtet, eine gerade Linie dar. Die Punkte, in welchen diese Linien einander schneiden, werden daher die verlangten Berührungspunkte sein, weil die Coordinaten dieser Punkte die besondern Werthe von x' und y' sind, welche beiden Gleichungen Genüge leisten. Es ist nicht schwer, jene Gerade TT' zu construiren, und hierauf die Berührungspunkte und Tangenten zu finden. $y' = 0$ gibt (weil x', y' die allgemeinen Coordinaten bezeichnen) für die Abscisse des Durchschnittspunktes der Sehne TT' mit der Achse der x, $CB = \frac{R^2}{\alpha}$. Da dieser Werth von β oder PM unabhängig ist, so folgt, daß, wenn sich der Punkt M der Geraden PM entlang fortbewegt, die Tangentenpaare ihre Lage ändern, und die geraden Linien, welche in jedem Falle die Berührungspunkte verbinden, alle durch denselben Punkt B gehen.

Anmerkung. Für den Durchschnittspunkt der die Berührungspunkte verbindenden Linie mit der Ordinatenachse erhält man die Ordinate $CB' = \frac{R^2}{\beta}$. Beide Durchschnittspunkte auf den Achsen werden also dadurch gefunden, daß man Stücke bezüglich gleich den dritten Proportionallinien zu α und R, dann zu β und R abschneidet.

Wir können übrigens die Rechnung auch in der Art ausführen, daß das in §. 59 der Elementar-Geometrie gezeigte Verfahren daraus sich ergibt. Wir ziehen deshalb die zweite der Gleichungen (2) von der erstern ab, und erhalten dadurch die Gleichung $y'^2 + x'^2 - \beta y' - \alpha x' = o$, welche sich auch so darstellen läßt: $(y' - \frac{1}{2}\beta)^2 + (x' - \frac{1}{2}\alpha)^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2)$. Betrachten wir diese Gleichung für sich allein, mithin x' und y' als Veränderliche, so stellt sich die Gleichung eines Kreises dar, in welchem die Coordinaten des Mittelpunkts m und der Halbmesser die Werthe haben: $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$ und $\sqrt{\frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)}$. Da die gesuchten Berührungspunkte T und T′ den beiden Gleichungen $x'^2 + y'^2 = R^2$ und $(y' - \frac{1}{2}\beta)^2 + (x' - \frac{1}{2}\alpha)^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2)$ genügen müssen, so werden die Durchschnitte dieser beiden Kreise jene Punkte bestimmen. Nimmt man demnach $Cp = \frac{1}{2} CP$; $pm = \frac{1}{2} PM$; so wird m der Mittelpunkt und Cm der Radius eines Kreises sein, der durch die gesuchten Berührungspunkte T und T′ geht.

§. 62. Es seien C, C′ die Mittelpunkte zweier Kreise von den Halbmessern R, R′. Man nehme die Centrallinie CC′ zur Abscissenachse, C zum Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten und setze $CC' = a$; so ist die Gleichung des Kreises C; $x^2 + y^2 = R^2$, und jene des Kreises C′; $(x-a)^2 + y^2 = R'^2$. Für die Durchschnittspunkte der Kreise erhalten wir durch Elimination:

$$x = \frac{a^2 + R^2 - R'^2}{2a},\ y = \frac{\pm\sqrt{[4a^2R^2 - (a^2+R^2-R'^2)^2]}}{2a}.$$

Da die Abscisse einfach, die Ordinate hingegen doppelt ist, so steht die Centrallinie auf der gemeinschaftlichen Sehne der beiden Kreise senkrecht. — Es wird keine Schwierigkeit haben, aus diesen Gleichungen die Bedingungen herzuleiten, unter welchen sich zwei Kreise durchschneiden, berühren, oder endlich keinen Punkt mit einander gemein haben. Um diese Bedingungen leichter zu finden, geben wir dem Ausdruck unter dem Wurzelzeichen folgende Form:

$$(a+R+R')\ (a+R-R')\ (R+R'-a)\ (R'+a-R).$$

Wir nehmen an, daß $R =$ oder $> R'$ sei. Da die beiden ersten Factoren positiv sind, so haben wir nur diejenigen Fälle zu untersuchen, welche die andern Factoren $R+R'-a$ und $R'+a-R$ darbieten können.

1) Haben sie einerlei Zeichen, so sind solche positiv; denn unmöglich kann zu gleicher Zeit $a > R+R'$ und $< R-R'$ sein. Ist y reell, so schneiden sich die Kreise, und man hat dafür die Bedingungen:

$$a < R + R' \text{ und } > R - R'.$$

2) Ist einer unserer beiden Factoren Null, was statt findet, wenn $a = R + R'$, oder $a = R - R'$ ist; so wird $y = 0$ und $x = R$; die Kreise haben also nur einen Punkt mit einander gemein, welcher auf der ihre Mittelpunkte verbindenden Geraden liegt; es ist dies der Fall, wo zwei Kreise einander berühren.

3) Sind die beiden Factoren mit verschiedenen Zeichen behaftet, nämlich $a > R + R'$ und $R - R'$, oder $a < R - R'$ und $R + R'$; so haben, da in der ersten dieser beiden Bedingungen die zweite mit enthalten ist, die Kreise keinen Punkt mit einander gemein, sobald $a > R + R'$, oder $< R - R'$ ist.

Anmerkung. Für den besondern Fall, daß $a = 0$ ist, werden die Werthe von x und y unendlich. Die Kreise sind in diesem Falle concentrisch und können einander nicht schneiden. Ist ausserdem $R = R'$, so findet man $x = \frac{0}{0}$ und $y = \frac{0}{0}$; die beiden Kreise haben in solchem Falle viele Punkte mit einander gemein, und in der That machen hier die beiden Kreise nur einen einzigen aus.

§. 63. Zur Uebung geben wir nachfolgende, hierher gehörige Aufgaben:

I. Eine Gerade und ein Kreis sind gegeben; man soll an diesen letztern eine Tangente legen, welche der gegebenen Geraden parallel ist.

II. An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

III. Zwei Punkte und eine gerade Linie sind gegeben; man soll einen Kreis finden, welcher durch die beiden Punkte geht und die Gerade berührt.

IV. Die Gleichung eines Kreises zu suchen, welcher zwei gegebene Geraden und einen gegebenen Kreis berühre. (Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt auf der Linie, welche den Winkel der Geraden halbirt.)

Anmerkung. Man construire nachstehende Gleichungen:

I. $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y - \frac{1}{2} = 0$.

II. $x^2 + y^2 - 2x = 15$.

III. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 5 = 0$.

IV. $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 8 = 0$.

Von der Transformation der Coordinaten.

§. 64. Die Gleichung einer Curve ist bisweilen so verwickelt, daß es schwer hält, die Eigenschaften derselben daraus herzuleiten. Eine solche Verwicklung kann nun zum Theil an den Cordinatenachsen, auf welche die Curve bezogen ist, liegen. So z. B. haben wir gesehen, daß die Gleichung des Kreises folgende verschiedene Formen annimmt: $(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=R^2$, $y^2=2Rx-x^2$, $x^2+y^2=R^2$; von denen die letztere die einfachste ist, weil der Anfangspunkt im Mittelpunkt liegt. Es ist daher nützlich, zu wissen, wie man die Coordinaten umzuwandeln hat, um zu denen zu gelangen, welche der Gleichung einer Curve die einfachste Form geben.

Wir nehmen an, daß Ax, Ay (Fig. 46) zwei einen beliebigen Winkel einschließenden Coordinaten seien, und daß andere Coordinatenachsen A'x', A'y' den erstern parallel gewählt würden. Bezeichnen $a=AB$ und $b=BA'$ die Coordinaten des neuen Anfangspunktes, $x=AP$ und $y=PM$ die alten Coordinaten eines Punktes M, $x'=A'C$ und $y'=CM$ die neuen Coordinaten desselben; so wird man haben $AP=BP+AB$, $PM=MC+CP$, oder $x=x'+a$, $y'=y+b$... (A).

Substituirt man in die Gleichung irgend einer Linie, auf das alte Coordinatensystem bezogen, statt x und y die eben gefundenen Werthe; so wird der Ursprung nach A'(a, b) verlegt und unsre Linie auf das neue System bezogen werden. Die Coordinaten a und b müssen übrigens diejenigen Zeichen, welche durch die Lage des neuen Ursprungs A' in Bezug auf den alten A bedingt sind, erhalten, in der Art, daß wenn jener z. B. in D läge, a positiv und b negativ würde, man demnach hier $x=x'+a$ und $y=y'-b$ zu setzen hätte; u. s. w.

§. 65. Wir nehmen jetzt an, daß man blos die Richtung der Achsen ändere und den Anfangspunkt beibehalte. Es seien deshalb Ax, Ay (Fig. 47) die ursprünglichen oder alten rechtwinkligen Coordinatenachsen, und Ax', Ay' die neuen Achsen. Wir stellen durch (xx') den Winkel xAx', welchen die Achsen der x und x' mit einander bilden, desgleichen durch (xy') den Winkel xAy' dar. Es kommt nun blos darauf an, für irgend einen Punkt M die alten Coordinaten $AP=x$ und $PM=y$ durch die neuen Coordinaten $AL=x'$ und $ML=y'$ und die gegebenen Winkel (xx'), (xy'), welche die

Lage der neuen Achsen bestimmen, auszudrücken. Man hat $x = AK + LI$, die Abscisse x ist also die Projection des Polygonstücks ALM auf die Achse der x; ebenso ist $y = LK + IM$. Die Dreiecke AKL, LIM geben aber

$$AK = x' \cos(xx'),\quad KL = x' \sin(xx'),$$
$$LI = y' \cos(xy'),\quad MI = y' \sin(xy').$$

Folglich
$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos(xx') + y' \cos(xy') \\ y &= x' \sin(xx') + y' \sin(xy') \end{aligned}\right\} \text{(B).}$$

Bilden die neuen Achsen gleichfalls einen rechten Winkel mit einander, so ist $(xy') = 90° + (xx')$; hieraus

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos(xx') - y' \sin(xx') \\ y &= x' \sin(xx') + y' \cos(xx') \end{aligned}\right\} \text{(C).}$$

Es folgt dies unmittelbar aus den Dreiecken AKL, LIM (Fig. 48); denn $AK = x' \cos(xx')$, $KL = x' \sin(xx')$,

$$LI = y' \sin(xx'),\quad IM = y' \cos(xx'),$$

und überdies $x = AK - IL$, $y = KL + IM$.

§. 66. Wir nehmen endlich an, daß sich die alten Achsen Ax, Ay wie die neuen Ax', Ay' (Fig. 47) unter einem beliebigen Winkel schneiden. Um von dem erstern Coordinatensystem zu dem zweiten überzugehen, betrachten wir die schiefwinkligen Dreiecke ALK, LMI; sie geben uns

$$\frac{AK}{AL} = \frac{\sin ALK}{\sin AKL},\ \text{woraus}\ AK = \frac{x' \sin(x'y)}{\sin(xy)};$$

ferner
$$KL = \frac{x' \sin(xx')}{\sin(xy)},\quad LI = \frac{y' \sin(yy')}{\sin(xy)},\quad IM = \frac{y' \sin(xy')}{\sin(xy)}.$$

Hieraus ziehen wir

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(x'y) + y' \sin(yy')}{\sin(xy)} \\ y &= \frac{x' \sin(xx') + y' \sin(xy')}{\sin(xy)} \end{aligned}\right\} \ldots\ \text{(D).}$$

Wenn man die ursprünglichen Achsen Ax, Ay schiefwinklig und die neuen Ax', Ay' (Fig. 48) rechtwinklig annimmt; so reicht es hin, $(x'y') = 90°$ oder $(x'y)$ = Complement von (yy') zu setzen. Man erhält hiernach

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(x'y) - y' \cos(x'y)}{\sin(xy)} \\ y &= \frac{x' \sin(xx') + y' \cos(xx')}{\sin(xy)} \end{aligned}\right\} \ldots\ \text{(E).}$$

Wir haben durchgehends vorausgesetzt, daß die Achse der x'. oberhalb der Achse der x gelegen sei, was für einen speciellen Fall, auf welchen man jene Formeln anwenden wollte, nicht statt haben könnte. Ein solcher Umstand wird durch Aenderung der Zeichen der Sinus und Cosinus nach den oben gegebenen Regeln angedeutet, indem dabei die Lage der Achsen in dem vorliegenden besondern Falle mit der, welche die Figuren 47 und 48 haben, verglichen wird. Läge z. B. die Achse der x' unterhalb Ax, so würde man sin (xx') negativ, cos (xx') positiv machen.

Anmerkung. Uebrigens gelangt man stets kürzer und sicherer zum Ziel, wenn man die Transformationsformeln aus der jedesmaligen Figur unmittelbar ableitet, indem man auf sie die hier gegebenen Operationen anwendet, d. h. daß man die Längen x' und y' auf jede der Achsen, welche man transformiren will, projicirt, wobei die Projectionen in den Richtungen dieser letzten Achsen geschehen.

Die vier constanten Größen, welche die Lage des neuen Ursprungs und die Richtung der neuen Achsen festsetzen, sind bekannt, wenn man eine gegebene Gleichung auf ein neues, bestimmtes Coordinatensystem umändern will. Oefters schreitet man aber zur Umwandelung der Coordinaten, um die Form der gegebenen Gleichung auf gewisse Weise zu ändern, um z. B. ein oder mehrere Glieder zu eliminiren. In diesem Falle sind jene vier gedachten Größen unbekannt, welche erst vorgeschriebenen Bedingungen gemäß bestimmt werden sollen, um den gewünschten Zweck zu erreichen.

Von den Polarcoordinaten.

§. 67. Bis jetzt haben wir die Lage eines Punktes in einer Ebene durch rechtwinklige und schiefwinklige, d. i. überhaupt durch Parallelcoordinaten bestimmt. Man gebraucht aber auch zuweilen die sogenannten Polarcoordinaten. Die Lage eines Punkts M (Fig. 50) ist nämlich gegeben, wenn man seinen Abstand AM = u von einem festen Punkt A, welcher Pol heißt, und den Winkel MAP = ϑ dieser Linie mit einer festen Geraden Ax oder Achse kennt; die Länge AM wird der Leitstrahl oder Radiusvector genannt. — Die Polargleichung einer Curve MN ist die zwischen u und δ für sämmt-

liche Punkte derselben stattfindende Relation. Dreht sich der Leitstrahl AM um den Punkt A und wird dabei seine Länge dergestalt geändert, daß der Gleichung zwischen u und ϑ stets Genüge geschieht; so beschreibt der Endpunkt M des Leitstrahls die Curve MN. Das rechtwinklige Dreieck AMP, wo AP $=$ x und PM $=$ y, gibt $x = u\cos\vartheta$; $y = u\sin\vartheta$, $x^2 + y^2 = u^2$.

Um also von einem Parallel-Coordinaten-System x und y zu einem Polar-Coordinaten-System u und ϑ überzugehen, muß man zuvörderst die vorgelegte Gleichung auf rechtwinklige Achsen, wenn die ursprünglichen schiefwinklig sind, übertragen, wobei der Punkt A, welcher den Pol abgeben soll, als Ursprung, und die Gerade Ax, von welcher die Bogen an gerechnet werden, als Achse der x gilt; hierauf substituirt man für x und y die Werthe $u\cos\vartheta$ und $u\sin\vartheta$. Umgekehrt, hat man die Polargleichung zwischen u und ϑ einer Curve, so erhält man, wenn diese Variabeln mit Hülfe der vorhergehenden Relationen eliminirt werden, die Gleichung derselben Curve auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen. Nehmen wir als Beispiel die Gleichung des Kreises, dessen Coordinaten des Mittelpunktes C (Fig. 49) α und β sind; so finden wir durch Substitution der Werthe von x und y die Polargleichung:

$$u^2 - 2u(\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta) + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = o \ (1).$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich nachstehende Folgerungen:

1) In jeder Lage des Radiusvectors AM werden zwei Punkte M und N der Curve erhalten. Die Werthe von u sind für die Richtungen der Linie AM imaginär, unter welchen sie den Kreis nicht trifft.

2) Das Produkt der Wurzel u'' und u', nämlich $u''u' = AM \times AN = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$ ist eine von ϑ unabhängige Größe; zieht man daher aus einen festen Punkt A beliebige gerade Linien, so bleibt das Produkt $AM \times AN$ der beiden Leitstrahlen für alle Secanten constant. — Je nach dem der Punkt A innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt, erhält man die in den §§. 73 und 74 der Elementar-Geometrie gefundenen Sätze wieder.

3) Der Coefficient des zweiten Gliedes ist die Summe der zwei Wurzeln u'' und u' mit entgegengesetzten Zeichen genommen. Setzen wir AC $=$ m, den Winkel CAM $= \varphi$; so kommt $\vartheta = \varphi + i$, $\alpha = m\cos i$, $\beta = m\sin i$, und $u'' + u' = 2m(\cos i\cos\vartheta + \sin\vartheta\sin i) = 2m\cos(\vartheta - i) = 2m\cos\varphi$; folglich $AM + AN = 2m\cos\varphi$, eine

Gleichung, welche leicht zu construiren ist, wenn man von den Größen $u''+u'$, m und φ zwei kennt und die dritte sucht.

4) Damit AM zur Tangente werde, müssen die Wurzeln $u''+u'$ gleich, und die Gleichung (1) ein vollständiges Quadrat sein, oder

$$4(\alpha\cos\vartheta+\beta\sin\vartheta)^2-4(\alpha^2+\beta^2-R^2)=0;$$ hieraus

$R^2=\alpha^2\sin^2\vartheta-2\alpha\beta\sin\vartheta\cos\vartheta+\beta^2\cos^2\vartheta=(\alpha\sin\vartheta-\beta\cos\vartheta)^2$, und $\pm R=m(\cos i\sin\vartheta-\sin i\cos\vartheta)=m\sin(\vartheta-i)=m\sin\varphi$. In dem rechtwinkligen Dreieck ATC, welches AC = m zur Hypothenuse und einen Winkel φ hat, ist daher R die diesem Winkel gegenüberliegende Seite TC. Hieraus folgt, daß die an den Kreis geführte Tangente auf dem nach dem Berührungspunkt gezogenen Radius senkrecht steht. Da überdies die Wurzeln u'' und u' gleich sind, so hat man $u^2=\alpha^2+\beta^2-R^2=m^2-R^2=(m+R)(m-R)$, oder $u^2=AB\times AI=AM\times AN$: Die Tangente ist also mittlere Proportionale zwischen der Secante und dem ausserhalb liegenden Stücke derselben.

5) Die Differenz der Wurzeln der Gleichung (1), oder die Sehne MN (k) ist gleich $\pm 2\sqrt{[R^2-m^2\sin^2(\vartheta-i)]}$; folglich $m\sin\varphi=\pm\sqrt{(R^2-\frac{1}{4}k^2)}$. Will man daher durch den Punkt A eine Sehne MN von bestimmter Länge ziehen, so trägt man von einem beliebigen Punkt des Kreises aus jene Sehne auf den Bogen mn auf (Fig. 51); die Senkrechte CO wird $=m\sin\varphi$ sein, wo φ den der Seite gegenüberliegenden Winkel des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypothenuse AC ist, darstellt. Man beschreibe also mit dem Radius CO einen Kreis und lege vom Punkt A aus Tangenten an denselben. Die letztern werden das Dreieck CFA, für welches der Winkel $A=\varphi$, bestimmen: die an den Hülfskreis geführten Tangenten AM werden mithin die beiden Auflösungen des Problems abgeben, welche nur insofern möglich sind, als der Punkt A sich ausserhalb des Kreises befindet.

6) Man kann, ohne die Allgemeinheit aufzuheben, die Gerade AB (Fig. 49), welche den Pol mit dem Mittelpunkt verbindet, als Achse der x, oder $\beta=0$, annehmen. Liegt nun der Pol in einem Punkt I des Umkreises, so reducirt sich die Gleichung (1) auf $u^2-2uR\cos\vartheta=0$, woraus $u=2R\cos\vartheta$; es ist dies die Länge k einer unter dem Winkel ϑ gegen den Durchmesser gezogenen Sehne. Denken wir uns jetzt einen zweiten Kreis, welcher den ersten in dem nämlichen Punkt I berührt; so erhalten wir auf ähnliche Weise für die Sehne k' desselben $k'=2R'\cos\vartheta$, wobei R' den Radius bezeichnet. Aus der Zusammenstellung der beiden letzten Gleichungen ergibt sich:

$k : k' = R : R'$: Die durch den Berührungspunkt I zweier sich von innen oder aussen berührenden Kreise gezogenen Sehnen verhalten sich also wie die Radien.

Viertes Kapitel.

Von den Kegelschnitten.

Von der Ellipse.

§. 68. Man gibt diesen Namen einer Curve von solcher Beschaffenheit, daß die Summe der Entfernungen $MF = z$, $MF' = z'$ eines jeden ihrer Punkte M (Fig. 52) von zwei festen Punkten F und F', welche die **Brennpunkte** oder Foci heißen, eine constante Größe ist. Setzen wir diese constante Größe $= 2a = AO$, so haben wir für die Punkte unserer Curve: $z + z' = 2a$. Um die Gleichung der Ellipse zu finden, nehmen wir die Mitte C von FF' für den Anfangspunkt der Coordinaten, AO als Achse der x und die auf ihr errichtete Senkrechte BC als Achse der y an. Aus der Art und Weise, wie die Curve entsteht, ergibt sich bei einigem Nachdenken bald, daß solche in Bezug auf das gewählte Achsensystem symmetrisch, mithin ihre Gleichung in Bezug darauf einfacher, als die auf andern Coordinatenachsen bezogene Gleichung derselben sein wird. Ueberhaupt verdient allemal dasjenige Coordinatensystem den Vorzug, welches die Rechnungen erleichtert und die einfachsten Gleichungen liefert. Man bezeichne den Abstand FF' der festen Punkte mit 2c und setze $CP = x$, $PM = y$. Die rechtwinkligen Dreiecke FMP, F'MP geben $z^2 = y^2 + FP^2$, $z'^2 = y^2 + F'P^2$, oder $z^2 = y^2 + (x - c)^2$, $z'^2 = y^2 + (x + c)^2$; ausserdem ist überall in der Curve $z + z' = 2a$. Zieht man die erste der letztern Gleichungen von der zweiten ab, so bleibt $z'^2 - z^2 = (z' + z)(z' - z) = 2a(z' - z) = 4cx$. Man findet leicht, daß

$FM = z = a \cdot \frac{cx}{a}$, und $F'M = z' = a + \frac{cx}{a} \ldots$ (1). Substituirt man dies in den Ausdruck von z^2 oder z'^2, so erhält man

$a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} = y^2 + x^2 + c^2 \ldots (2)$. Macht man $x = o$, so hat man für die Ordinate des Durchschnittspunktes der Curve mit der Ordinatenachse $y^2 = a^2 - c^2$. Stellt man diese Ordinate durch b dar, oder setzt man $b^2 = a^2 - c^2$; so nimmt die Gleichung der Ellipse folgende Form an: $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \ldots (3)$.

§. 69. Löst man diese Gleichung nach y auf, so kommt $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Das doppelte Zeichen zeigt, daß jeder Abscisse zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y zukommen. Die Ellipse ABOD (Fig. 53) wird daher durch die Abscissenachse AO in zwei symmetrische Theile geschnitten; sie wird es auch durch die Ordinatenachse BD, weil zu $+x$ und $-x$ gleiche Ordinaten gehören. Dreht man demnach die Figur um AO oder BD, so werden sich die Theile der Curve in allen Punkten vollkommen decken.

Für $x > \pm a$ fällt y imaginär aus, wie x ebenfalls für $y > \pm b$ unmöglich wird; woraus hervorgeht, daß die Ellipse eine geschlossene krumme Linie ist. $BC = b$ ist die größte Ordinate, $CO = a$ die größte Abscisse der Curve. AO wird die erste oder große Achse, und BD die zweite oder kleine Achse genannt. Die Endpunkte A, O, B, D heißen die Scheitel, und C der Mittelpunkt der Ellipse. Die Ellipse ist also eine geschlossene Curve von solcher Beschaffenheit, daß die Summe der nach einem beliebigen Punkt derselben aus den beiden Brennpunkten gezogenen Leitstrahlen inner der großen Achse gleich ist. Die durch die zwei Brennpunkte gezogene, auf beiden Seiten von der Ellipse begrenzte Linie ist die große Achse, und die Mitte derselben der Mittelpunkt der Ellipse.

Anmerkung. Die Entfernung d eines Punktes M der Curve vom Mittelpunkt ist gleich $\sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{\left(b^2 + x^2 \frac{[a^2 - b^2]}{a^2}\right)}$ wenn man für y^2 den aus der Gleichung (3) gewonnenen Werth einführt. Dieser Ausdruck erreicht sein Minimum für $x = o$, nimmt zu, wenn x wächst, und gelangt zu seinem Maximum, wenn $x = a$ wird. Hiernach ist CB der kleinste und CO der größte Abstand.

§. 70. Vergleichen wir die zu zwei verschiedenen Abscissen x und x′ gehörigen Ordinaten y und y′ einer und derselben Ellipse (Fig. 53),

so haben wir die Gleichungen $a^2y^2 = b^2(a^2 - x^2)$ und $a^2y'^2 = b^2(a^2 - x'^2)$, woraus sich ergibt $\frac{y^2}{y'^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - x'^2} = \frac{(a+x)\ (a-x)}{(a+x')\ (a-x')}$.

Es ist aber $CP = x$, $AP = a + x$, $PO = a - x$: bei jeder Ellipse verhalten sich daher die Quadrate der Ordinaten zu einander, wie die Produkte der Abschnitte, in welche die große Achse durch die Ordinaten getheilt wird.

Verwandelt man x in y und y in x, so geht die Gleichung (3) in folgende über: $b^2y^2 + a^2x^2 = a^2b^2$; sie behält mithin ganz dieselbe Form, die Abscissen mögen auf der großen oder kleinen Achse gezählt werden.

§. 71. Die Gleichung des aus dem Mittelpunkt C (Fig. 53) der Ellipse mit dem Radius a beschriebenen Kreises ist $Y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, wobei $Y = PN$. Vergleichen wir diese Ordinate mit jener der Ellipse, so haben wir $\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$. Das Verhältniß der zu einerlei Abscissen gehörigen Ordinaten des Kreises und der Ellipse ist also constant und gleich dem der Achsen. Der Kreis schließt die Ellipse ein, während der mit dem Halbmesser BC beschriebene Kreis von derselben eingeschlossen wird. Diese Eigenschaft bietet ein sehr einfaches Mittel dar, die Ellipse zu construiren. Nachdem man nämlich die gegebenen Achsen AO, BD der gesuchten Ellipse gezogen, und zwei Kreise, den einen über der großen, den andern über der kleinen Achse als Durchmessern beschrieben hat, ziehe man einen beliebigen Radius CN, und lege durch die Punkte Q und N, in denen jener Halbmesser die beiden Kreise schneidet, die Geraden QM, NP den Achsen bezüglich parallel. Der Durchschnittspunkt dieser Geraden wird der verlangten Ellipse angehören; denn es ist $\frac{PM}{PN} = \frac{CQ}{CN}$, oder $\frac{PM}{Y} = \frac{b}{a}$, woraus $PM = y$.

§. 72. Die Definition der Ellipse gibt ein anderes Verfahren an die Hand, diese Curve zu verzeichnen (Fig. 52). Nachdem man die beiden Achsen AO, BD der Ellipse gezogen hat, beschreibe man aus dem Punkt B als Mittelpunkt mit dem Halbmesser CO einen Kreisbogen; derselbe schneidet die Achse AO in zwei Punkten F und F′, welche die Brennpunkte der verlangten Ellipse sein werden, weil $b^2 = a^2 - c^2$. Beschreibt man nun aus F als Mittelpunkt mit einem beliebigen Stück von AO als Radius, wie OK, einen Kreisbogen, zieht hierauf aus F′,

als neuem Mittelpunkt, mit dem Reste AK der großen Achse, einen zweiten Kreis; so wird derselbe den ersten in zwei Punkten schneiden, welche zur Ellipse gehören, da $FM + F'M = AO$. Verwechselt man in Bezug auf diese Halbmesser F und F′ miteinander, so erhält man zwei neue Punkte, welche ebenfalls der Ellipse angehören. Wiederholt man dies Verfahren mit immer andern Zirkelöffnungen, so kann man so viel Punkte der Ellipse, als man nur will, finden.

Wenn die Ellipse eine große Ausdehnung hat, so befestigt man in den Brennpunkten F und F′ die beiden Enden eines Fadens, dessen Länge der Achse AO gleich ist. Man spannt nun diesen Faden mittelst eines Stiftes aus, läßt dann solchen längs jenes Fadens umhergleiten, dergestalt, daß derselbe immer gespannt bleibt; während dieser Bewegung wird der Stift die Ellipse beschrieben haben.

§. 73. In dem Maß, daß sich die Brennpunkte von einander entfernen, oder b in Bezug auf a abnimmt, wird die Ellipse länglichter; sie wird im Gegentheil runder, wenn die Brennpunkte einander näher rücken; sie wird endlich kreisförmig, wenn diese Punkte zusammenfallen, oder $a = b$, wo man hat $x^2 + y^2 = a^2$. Man kann demnach den Kreis als eine Ellipse, deren Achsen gleich sind, betrachten. Aus der Gleichung (1) geht hervor, daß die Leitstrahlen der Ellipse rational in Bezug auf die Abscissen x sind. Die Distanz $FC = c$ heißt die Excentricität. Die Leitstrahlen z und z′ erreichen ihr Maximum oder Minimum für $x = \pm a$, nämlich $z = a \pm c$. Von allen Punkten der Ellipse liegt also der Scheitel O dem Brennpunkt F am nächsten, und A am weitesten davon ab. Der Scheitel B der kleinen Achse befindet sich in einer mittlern Entfernung von dem Brennpunkt F; denn $x = o$ gibt $z = z' = a = BF$.

Der Werth der doppelten durch den Brennpunkt gehenden Ordinate wird der Parameter genannt. Man findet diesen Parameter, wenn man $x = c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ in der Gleichung (3) setzt. Man findet hierbei $y = \pm \frac{b^2}{a}$, woraus $p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$. Der Parameter ist also die dritte Proportionale zu der großen und kleinen Achse.

Wollen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Scheitel A verlegen, so müssen wir in der Gleichung (3) $x - a$ mit x vertauschen, wodurch sie dann folgende Form erhält: $a^2 y^2 = b^2 (2ax - x^2)$.

Anmerkung. Hat man eine Gleichung von der Form $Ay^2 + Bx^2$

$=C$, wobei A, B und C positive Größen sind, so stellt dieselbe eine Ellipse vor, deren beide halben Achsen $\sqrt{\frac{C}{B}}$ und $\sqrt{\frac{C}{A}}$ sind. Die große Achse liegt auf der Abscissenachse, wenn $A>B$. dagegen auf die Ordinatenachse, wenn $B>A$. Nachstehende zwei Gleichungen gehören offenbar zwei Ellipsen an: $x^2+2y^2=3$ und $5y^2+6x^2=10$.

§. 74. Um die Polargleichung der Ellipse zu finden, wo der eine Brennpunkt als Pol und die große Achse als feste Gerade gilt, setzen wir $x'+c$ für x in dem Werthe (1) von FM, hierauf $z\cos\vartheta$ für x', wo ϑ den Winkel MFO darstellt. Auf diese Weise erhält man die Polargleichung: $z=\frac{a^2-c^2}{a+c\cos\vartheta}=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}$. In diesem Ausdruck bezeichnet e das Verhältniß der Excentricität zur halben großen Achse, oder $c=ae$; der Pol liegt in F, und die Bogen ϑ werden vom benachbarten Scheitel O aus in der Richtung OMB gezählt. Befindet sich der Pol in dem Brennpunkt F' und werden die Bogen ϑ in der nämlichen Richtung gezählt, so muß man e in $-e$ verwandeln.

Von der Hyperbel.

§. 75. Diese Curve hat die Eigenschaft, daß für jeden ihrer Punkte M (Fig. 54) die Differenz der Abstände $F'M$, FM von zwei festen Punkten F, F' einer constanten Größe AO ($2a$) gleich ist. Die beiden Punkte F, F' werden wieder Brennpunkt genannt. Werden die in §. 68 gebrauchten Bezeichnungen beibehalten, und die daselbst gemachten Rechnungen wiederholt, so werden wir haben: $z'^2-z^2=2a(z'+z)=4cx$; woraus $FM=z=\frac{cx}{a}-a$. $F'M=z'=\frac{cx}{a}+a$...(4).

Diese Werthe von z und z' in $2(x^2+y^2+c^2)=z^2+z'^2$ substituirt, geben die Gleichung $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, wenn man $c^2=a^2+b^2$ setzt. Die Gleichung $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}$ zeigt, daß die Punkte der Curve in Bezug auf die Coordinatenachsen FF' und Cy symmetrisch liegen. Der Werth von y wächst fortwährend mit dem positiven sowohl als negativen Werth von x. Man kann jedoch x nicht $<\pm a$ nehmen; für $x=\pm a$ folgt $y=o$. Zwischen den beiden durch

A und O mit yC parallel geführten Geraden liegt also kein Punkt der Hyperbel. Dagegen erstreckt sich die Curve von diesen Punkten aus ins Unendliche, so daß sie aus zwei ihrer Convexität nach entgegengesetzten, ins Unendliche fortgehenden Aesten besteht, von denen der eine gegen die rechte, der andere gegen die linke Seite hin seine Oeffnung hat. Der Punkt C heißt der Mittelpunkt; $AO = 2a$ die erste Achse oder Querachse; die Endpunkte derselben, welche zugleich in der Curve liegen, werden auch hier wieder Scheitel genannt. Für $x = o$ wird $y \pm b\sqrt{-1}$, also imaginär. Macht man diese Größe reell, indem man das Zeichen unter dem Wurzelzeichen ändert; so erhält man die Länge b, oder die reell gemachte Centralcoordinate. Man nennt das Doppelte der letztern Größe die zweite Achse oder Nebenachse; sie gibt keine eigentliche Dimension der Curve ab, indem ihre Endpunkte nicht wie die der zweiten Achse der Ellipse in der Curve liegen.

§. 76. Die Ordinaten y und y′ (Fig. 55), welche den Abscissen x und x′ einer Hyperbel entsprechen, geben

$$\frac{y^2}{y'^2} = \frac{x^2 - a^2}{x'^2 - a^2} = \frac{(x+a)\,(x-a)}{(x'+a)\,(x'-a)} = \frac{OP \cdot AP}{OP' \cdot AP'};$$

d. h. die Quadrate der Ordinaten verhalten sich zu einander wie die Produkte der Entfernungen ihrer Fußpunkte von den beiden Scheiteln.

Für $a = b$ wird die Gleichung der Hyperbel: $y^2 = x^2 - a^2$. Man nennt in diesem Falle die Hyperbel gleichseitig; sie ist unter den Hyperbeln das, was der Kreis unter den Ellipsen.

Vertauscht man x mit y und y mit x, so erhält man die Gleichung $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$, welche mit der obigen, das Zeichen der zweiten Hälfte abgerechnet, einerlei Form hat. Die Abscissen werden hier auf der Linie BD und die Ordinaten auf der Linie CP genommen, und man sagt: die Hyperbel sei auf den Mittelpunkt und die zweite Achse bezogen.

Um die Scheitelgleichung der Hyperbel zu erhalten, für welche Gleichung der Ursprung z. B. in A liegt, darf man nur $x + a$ statt x setzen: man bekommt dadurch $a^2y^2 = b^2(2ax + x^2)$.

§. 77. Beschreibt man über den nämlichen Achsen die Ellipse ABOD (Fig. 55), so wird dieselbe zwischen den beiden Scheiteln liegen. Ihre große Achse fällt auf die gegebene Abscissenachse oder Ordinatenachse, je nachdem $a >$ oder $< b$ ist. Wenn die Hyperbel gleichseitig ist, geht

gedachte Ellipse in einen Kreis über. Beide Curven haben analoge Eigenschaften, welche in Carnots Geometrie der Stellung, übersetzt von Schumacher, näher erörtert sind.

§. 78. Nach der Erklärung der Hyperbel kann dieselbe auf folgende Weise construirt werden: Man ziehe zuvörderst die Achsen FF′, Cy (Fig. 54), beschreibe dann aus F, als Mittelpunkt, mit einem beliebigen Halbmesser Ax einen Kreisbogen, und einen zweiten aus F′ mit dem Halbmesser Ox; die beiden Bogen werden sich in zwei zur Hyperbel gehörigen Punkten M schneiden, weil $F'M - FM = AO$. Mit den nämlichen Halbmessern erhält man, wenn die Punkte F und F′ mit einander verwechselt werden, zwei andere Hyperbelpunkte. Nimmt man für x immer neue Punkte, so lassen sich durch dies Verfahren so viele Punkte, als man nur will, finden.

Anmerkung. Um die Hyperbel durch eine stetige Bewegung zu beschreiben, bringe in den einen Brennpunkt F′ ein Lineal F′M so an, daß es sich um denselben drehen läßt; befestige dann in dem Endpunkt des Lineals das eine Ende eines Fadens, dessen Länge um $OA = 2a$ länger als das Lineal ist (dieses vom Drehungspunkt bis zum Endpunkt genommen), und das andere Ende des Fadens in dem zweiten Brennpunkt F; drehe endlich das Lineal um den Punkt F′, wobei ein Stift M dergestalt an demselben hingleitet, daß der Faden während der Bewegung immer gespannt bleibt. Auf diese Weise wird der Stift einen Theil der Hyperbel beschreiben, dessen Größe durch die Länge des Lineals bedingt ist. Werden die Brennpunkte in Bezug auf dieses Verfahren mit einander verwechselt, so erhält man einen Theil des entgegengesetzten Astes.

§. 79. Aus den Gleichungen (4) geht hervor, daß die Leitstrahlen der Hyperbel gleichfalls wie die der Ellipse rational in Bezug auf die Abscissen sind.

Der Parameter, oder die doppelte durch den Brennpunkt gehende Ordinate behält denselben Werth wie bei der Ellipse, nämlich $p = \frac{2b^2}{a}$.

Wird eine ähnliche Schlußfolge wie im §. 74 angewendet, so findet man, wenn F der Pol ist, und der Winkel $AFM = \vartheta$ und $c = ae$ gesetzt wird, für die Polargleichung der Hyperbel:

$$z = \frac{c^2 - a^2}{a + c \cos \vartheta} = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \vartheta}.$$

§. 80. Vergleicht man die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel mit einander, so bemerkt man bald, daß sich die eine aus der andern dadurch ableiten läßt, daß man in derselben $b\sqrt{-1}$ anstatt b setzt. Mittelst dieses Rechnungskunstgriffes lassen sich die für eine der Curven gefundenen Formeln in diejenigen, welche der andern zukommen, ganz einfach übertragen.

Anmerkung. Die Gleichung $Ay^2 - Bx^2 = -C$, wo A, B, C positive Größen bezeichnen, gehört einer Hyperbel an, deren Querachse auf die Abscissenachse fällt und deren halbe Achsen $\sqrt{\frac{C}{B}}$ und $\sqrt{\frac{C}{A}}$ sind. Die Gleichung $Ay^2 - Bx^2 = C$, in der A, B, C abermals positiv sind, stellt gleichfalls eine Hyperbel dar, mit dem Unterschiede, daß die Querachse auf die Ordinatenachse aufzutragen ist. Der geometrische Ort der beiden Gleichungen $2y^2 - 3x^2 = 5$ und $3y^2 - 2x^2 = 6$ sind sonach Hyperbeln.

Von der Parabel.

§. 81. Die Parabel ist eine Curve von solcher Beschaffenheit, daß jeder ihrer Punkte M (Fig. 57) von einer gegebenen Geraden QQ′ ebensoweit entfernt ist, als von einem gegebenen Punkt F. Die bestimmte Gerade wird Leitlinie oder Directrix, der feste Punkt F wieder Brennpunkt genannt. Nehmen wir die auf die gegebene Gerade QQ′ senkrecht gezogene Linie DF zur Abscissenachse, und den Punkt A, die Mitte von der Linie $DF = p$, zum Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten; so ist offenbar der Punkt A ein Punkt der Curve. Für irgend einen andern Punkt M haben wir $AP = x$, $PM = y$, $QM = DP$, oder $z = \frac{1}{2}p + x$. Das rechtwinklige Dreieck FMP gibt aber $FM^2 = z^2 = y^2 + (x - \frac{1}{2}p)^2$. Durch Gleichsetzung der beiden Werthe von z und nach gehöriger Entwicklung kommt $y^2 = 2px$, welches sofort die Gleichung der Parabel ist. Die Gleichung $y = \pm\sqrt{2px}$ zeigt, daß die Curve nur in Bezug auf die Abscissenachse symmetrisch ist, und daß sie sich nur nach einer Seite der Abscissen

hin ins Unendliche erstreckt. Aus diesem Grunde heißt die Gerade Ax die Achse der Parabel.

Zwei Punkte (x, y), (x', y') auf der Parabel geben $\frac{y^2}{y'^2} = \frac{x}{x'}$, woraus erhellet, daß in der Parabel die Quadrate der Ordinaten sich wie die zugehörigen Abscissen verhalten.

Kennt man die constante Größe, welche Parameter heißt, nicht, dafür aber die Lage eines Punktes der Curve; so sieht man, daß 2p die mittlere Proportionale zwischen der Abscisse und der Ordinate dieses Punktes ist.

Setzt man $x = \frac{1}{2}p = AF$, so hat man $y = \pm p$; woraus folgt, daß der Parameter der Parabel ebenfalls den Werth der doppelten durch den Brennpunkt gehenden Ordinate ausdrückt.

§. 82. Um die Parabel, deren Parameter AB = 2p (Fig. 56) gegeben ist, zu construiren, wird man, da y mittlere Proportionale zwischen AB und x ist, einen Kreis beschreiben, der durch den Punkt B geht und seinen Mittelpunkt in irgend einem Punkt der Geraden AO hat. Die Linie AC ist gleich der Abscisse AP entsprechende Parabelordinate y; die den Coordinatenachsen parallel gezogenen Linien CM, PM werden mithin in ihrem Durchschnittspunkt den Parabelpunkt M bestimmen. Man kann auf diese Weise so viel Punkte, als man nur will, finden.

Die Art der Erzeugung der Curve bietet auch ein einfaches Mittel dar, sie zu verzeichnen. Man hat nämlich $z = \frac{1}{2}p + x$, d. h. der Werth des Leitstrahls der Parabel ist ebenfalls rational. Nimmt man nun auf der Achse der x (Fig. 57) vom Punkt A an, dem Scheitel der Parabel, die Abstände $AD = AF = \frac{1}{2}p$; so wird F der Brennpunkt und die auf die Gerade Ax errichtete Senkrechte DQ die Leitlinie sein.

Es handelt sich jetzt darum, sämmtliche Punkte M zu finden, welche von dem Punkte F eben so weit als von der Leitlinie abstehen. Man zieht deshalb die beliebige, unbestimmte Ordinate MM', beschreibt dann aus dem Brennpunkt F als Mittelpunkt mit dem Halbmesser PD einen Kreisbogen; die Punkte M und M', in welchen dieser Bogen die Gerade MM' schneidet, werden zur gesuchten Parabel gehören.

Anmerkung. Es läßt sich die Parabel auch durch eine ununterbrochene Bewegung beschreiben. Man lege zu diesem Zweck

an die Leitlinie QQ′ (Fig. 57) den Schenkel eines rechten Winkels (Winkelhackens), dessen zweiter Schenkel die Gerade QS vorstellt; befestige hierauf das Ende eines Fadens von der Länge des zweiten Schenkels QS in den Brennpunkt F, und das andere Ende des Fadens in S, dem Endpunkt jenes zweiten Schenkels; man lasse jetzt den rechten Winkel an der Leitlinie hingleiten, und drücke während dieser Bewegung den Faden mittelst eines Stiftes dergestalt an den Schenkel QS, daß er immer gespannt bleibt. Der Stift wird so einen parabolischen Bogen beschreiben, dessen Länge von der des Schenkels QS abhängt.

§. 83. Um die Polargleichung der Parabel zu erhalten, nehmen wir den Brennpunkt F zum Pol, verlegen daher dahin den Ursprung, was dadurch geschieht, daß wir $x = x' + \frac{1}{2}p$ in dem Ausdruck $z = \frac{1}{2}p + x$ setzen. Machen wir endlich FP oder $x' = -z\cos\vartheta$, wobei ϑ den vom Scheitel an gezählten Winkel AFM bezeichnet; so kommt $z = \frac{p}{1+\cos\vartheta}$.

Anmerkung. Man construire die Gleichungen $y^2 = -6x$, $x^2 = 4y$, deren geometrische Oerter Parabeln sind, bei welchen die Achse der erstern mit der Abscissenachse nach der Seite der negativen x hin, die der zweiten dagegen mit der Ordinatenachse nach der Seite der positiven y hin zusammenfällt.

§. 84. Die Scheitelgleichung der Ellipse ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ (§. 73). Die Entfernung des Scheitels A vom nächstliegenden Brennpunkt F hat zum Ausdruck $a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Setzen wir diese Größe $= \frac{p}{2}$, so kommt $b^2 = ap - \frac{p^2}{4}$. Die vorige Gleichung erhält durch Einführung dieses Werthes von b^2 die Form:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}\left(x^2 + \frac{px}{2}\right) + \frac{p^2x^2}{4a^2}.$$

Geben wir in dieser Gleichung dem a nach und nach verschiedene Werthe, wobei p ungeändert bleiben soll; so erhalten wir eine Reihe von Ellipsen, die verschiedene große Achsen, aber den nämlichen Brennpunkt F haben. Betrachten wir nun die Ordinaten jener Ellipsen für einerlei x; so finden wir, daß die Glieder, welche in dem Werthe von y^2 durch a dividirt sind, immer kleiner und kleiner werden, in dem

Maße als a zunimmt, und daß sich für ein endliches x, wenn a unendlich wird, die Gleichung der Ellipse in jene der Parabel $y^2=2px$ verwandelt. In der Nähe der Scheitel der großen Achse weicht also die Ellipse desto weniger von einer Parabel ab, je größer, für einerlei Parameter, die große Achse ist; oder mit andern Worten, die Parabel kann als eine Ellipse angesehen werden, deren erste Achse unendlich groß ist.

Von den in einem geraden Kegel durch eine Ebene gemachten Schnitten.

§. 85. Wir wollen die Gleichung der Curve AMO (Fig. 58), welche aus dem Durchschnitt der Fläche eines geraden Kegels IDB von kreisförmiger Grundfläche mit irgend einer Ebene OA entsteht, suchen. Man lege in dieser Absicht durch die Achse BK eine auf die schneidende Ebene senkrechte Ebene BDI; dieselbe wird auch auf der Basis senkrecht stehen. Die Durchschnittslinie AO der beiden erstern Ebenen gibt die Projection der Achse des Kegels in Bezug auf die Schnittebene ab; es heißt diese Linie die Achse des Kegelschnitts. Man führe ferner durch einen beliebigen Punkt P dieser Achse eine Ebene parallel mit der Basis DI des Kegels; gedachte Ebene schneidet die conische Fläche in einem Kreis FMG, und die Ebene unsers Kegelschnitts in der Geraden PM, welche zugleich auf FG und AO senkrecht stehn (Geometrie §. 118) und eine gemeinschaftliche Ordinate von beiden Curven abgeben wird. Wir setzen jetzt $AP=x$, $PM=y$ und suchen die Relation zwischen x und y und den in dem Problem vorkommenden Größen, nämlich der Entfernung $AB=c$; dem Winkel $BAO=\alpha$, $DBI=\beta$. Die Eigenschaft des Kreises gibt $y^2=FP\times PG$; wir müssen also Ausdrücke für FP und PG finden. In den Dreiecken AFP, POG und ABO hat man aber

$$\frac{\sin\alpha}{\sin F}=\frac{FP}{x},\ \frac{\sin O}{\sin G}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin F}=\frac{PG}{PO}=\frac{PG}{AO-x},\ \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}=\frac{AB}{AO}=\frac{c}{AO},$$

woraus $AO=\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. In dem rechtwinkligen Dreieck BHF ist ferner der Winkel $F=90-\frac{1}{2}\beta$, folglich $FP=\frac{x\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta}$,

$$PG=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\beta}\left(\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}-x\right).$$

Mittelst dieser gefundenen Werthe bekommt man für die verlangte Gleichung des Kegelschnitts: $y^2 = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}[cx\sin\beta - x^2\sin(\alpha+\beta)]$..(A). Um sämmtliche Kegelschnitte zu erhalten, ist es hinreichend, der schneidenden Ebene alle möglichen Lagen zu geben, d. h. die Gerade AO sich um den Punkt A drehen zu lassen und auch AB = c zu ändern. Es bieten sich drei Fälle dar:

1) Für $\alpha + \beta = 180^0$ gelangt die Schnittebene in die mit der Erzeugungslinie BI (Fig. 59) parallele Lage, und die Curve dehnt sich ins Unendliche aus. Die Gleichung geht in vorliegendem Fall, weil $\sin(\alpha+\beta) = o$, in $y^2 = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\cdot cx = 4cx\sin^2\frac{1}{2}\beta$... (B) über; und dies ist die Gleichung einer Parabel.

Anmerkung. Man könnte die oben angeführte Schlußart hier wiederholen. FP behält seinen Werth bei und ist $= \frac{x\sin\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta}$, wenn man $\sin\alpha = \sin\beta$ setzt. Zieht man AL parallel zu GF, so gibt das Dreieck ABL, $\frac{\sin\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{AL}{BL} = \frac{PG}{c}$; folglich PG $= \frac{c\sin\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta}$. Hiernach entsteht $PM^2 = y^2 = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\cdot cx$ wie oben.

2) So lange $\alpha + \beta < 180$ ist, trifft die schneidende Ebene sämmtliche Erzeugungslinien nach derselben Seite vom Scheitel aus. Die entstehende Curve ist nach allen Seiten hin geschlossen, und die Gleichung (A) sofort ihr algebraischer Ausdruck.

3) Wird endlich $\alpha + \beta > 180^0$, so trifft die schneidende Ebene die beiden entgegengesetzten Kegeln, die eigentlich nur eine Fläche ausmachen. Die jetzt sich bildende Curve besteht aus zwei entgegengesetzten Zweigen: M'AN', LO'Q (Fig. 58), davon sich jeder ins Unendliche ausdehnt. Für diesen Fall wird $\sin(\alpha+\beta)$ negativ und man erhält die Gleichung: $y^2 = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}[cx\sin\beta + x^2\sin(\alpha+\beta)]$...(C). Stellen wir in den beiden letzten Fällen durch 2a die Distanz AO zwischen den beiden Scheiteln, und durch K einen constanten Coefficienten dar; so haben wir $2a = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $K = \frac{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\beta}$....(D) und die Gleichungen (A) und (C) gehen in folgende über: $y^2 =$

$K(2ax \mp x^2)$; es sind dies die Scheitelgleichungen der Ellipse und Hyperbel (§§. 73 und 76). Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts, wobei der Ursprung im Scheitel liegt, ist folglich $y^2 = mx + nx^2$. Dieselbe entspricht:

1) einer Parabel, wenn $n = o$, $(m = 2p)$;

2) einer Ellipse, wenn $n = -\frac{b^2}{a^2}$ und $m = \frac{2b^2}{a}$;

3) einer Hyperbel, wenn $n = \frac{b^2}{a^2}$ und $m = \frac{2b^2}{a}$.

Anmerkung. Die Gleichung $y^2 = mx + nx^2$ enthält den Grund der Benennungen Parabel, Ellipse und Hyperbel, wovon die erste eine Gleichheit, die zweite einen Mangel, die dritte einen Ueberschuß bezeichnet. Bei der Parabel nämlich ist das Quadrat der Ordinate eben so groß, bei der Ellipse kleiner, und bei der Hyperbel größer als das Rechteck mx.

§. 86. An Allem dem, was wir bisher gesagt haben, ist nichts zu ändern, wenn wir β und c, d. h. die Dimensionen des Kegels und die Distanz AB verschieden annehmen. Man kann nicht $\beta = o^0$, oder $\beta = 180^0$ setzen, weil es dann keinen Kegel mehr gäbe. Für $c = o$, geht die schneidende Ebene durch die Spitze des Kegels. Der Durchschnitt reducirt sich alsdann auf einen Punkt, wenn $\alpha + \beta < 180°$; dagegen auf eine gerade Linie, wenn $\alpha + \beta = 180°$ (die schneidende Ebene verwandelt sich in eine berührende); endlich auf zwei gerade Linien, wenn $\alpha + \beta > 180^0$. Die Rechnung gibt die drei letztern Fälle ebenfalls an: denn setzt man in der Gleichung (A) $c = o$ und hierauf $\sin(\alpha + \beta)$ positiv, Null und negativ; so findet man

$$y^2 + Kx^2 = o,\ y = o,\ y^2 = Kx^2.$$

Der ersten Gleichung kann nur für $x = o$ und $y = o$ Genüge geleistet werden, sie sind sofort die Coordinaten eines Punktes; die zweite gehört einer geraden Linie (der Abscissenachse) an; die dritte endlich gibt $y = \pm x\sqrt{K}$, offenbar die Gleichung zweier sich schneidenden Geraden.

Die Gleichung (A) ist also, welches auch der Kegel und die Lage der Schnittebene sein mögen, der algebraische Ausdruck von sechs Kegelschnitten. Für $c = o$ erhält man die drei durch den Scheitel gehenden Schnitte. Ist c nicht Null, so stellt jene Gleichung eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel dar, je nachdem der Coefficient von x^2 negativ, positiv oder Null ist.

Anmerkung. Die Dimensionen dieser Kegelschnitte hängen vor-

zugsweise von der Größe des Winkels β am Scheitel des Kegels, von der Größe des Winkels α und der Entfernung $AB=c$ ab.

§. 87. Ist die Scheitelgleichung einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, desgleichen ein beliebiger gerader Kegel gegeben; so ist es leicht, diese Curve auf den Kegel zu bringen, d. h. die Lage der schneidenden Ebene, welche jene Curve auf der conischen Fläche bildet, zu finden. In den beiden ersten Fällen kennt man nämlich a, K und β, und es handelt sich darum, die Größe c und den Winkel α mit Hülfe der Gleichungen (D) zu suchen. Die erste lehrt uns c kennen, sobald man α aus der zweiten gefunden hat. Es verwandelt sich diese in folgende: $2K \cos^2 \frac{1}{2}b = 2 \sin^2 \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta$ $=(1 - \cos 2\alpha) \cos \beta + \sin 2\alpha + \sin \beta$. Die letztere Gleichung von der Form $b = n \sin 2\alpha + l \cos 2\alpha$ wurde in §. 47 aufgelöst.

Ist die gegebene Gleichung, die einer Parabel $y^2 = 2px$, so liefert die Gleichung (B) den Ausdruck $p = 2c \sin^2 \frac{1}{2}\beta$, aus welchem sich c und sofort die Lage der Schnittebene ergibt.

Von den Tangenten.

§. 88. Legt man durch zwei Punkte M und Q (Fig. 60) irgend einer Curve BMQ eine Secante SMQ, und läßt hierauf die Lage von Q auf der Curve sich ändern, während der Punkt M unverrückt bleibt; so wird die Secante verschiedene Neigungen annehmen. Nähert sich nun Q dem M, bis beide Punkte in einen zusammenfallen; so wird die Secante SQ in die Lage der Geraden TM kommen. Man nennt diese Gerade MT die Tangente der Curve im Punkte M; die Tangente ist also eine Secante, deren beide Durchschnittspunkte in einen, den Berührungspunkt, zusammenfallen. Die Gleichung irgend einer durch den Punkt $M(x', y')$ gehenden Secante ist $y - y' = A(x - x') \ldots (1)$. Um die Lage der Tangente TM zu bestimmen, ist es hinreichend, den Werth von $A = \operatorname{tang} T$, welcher der Neigung dieser Geraden entspricht, auszumitteln; wir müssen deshalb in die algebraische Sprache die Bedingungen, welche der Erklärung jener Geraden zum Grunde liegen, übertragen. Bezeichnen wir nun die Coordinaten des zweiten Durchschnittspunkts Q der Secante SM mit $x' + h$ und $y' + k$, oder setzen wir $MR = h$, $QR = k$; so kommt $\operatorname{tang} QMR = \operatorname{tang} S = \frac{k}{h}$. Substituiren wir in die Gleichung der Curve $x' + h$ und $y' + k$ für x' und y', so ist es

leicht, nach geschehener Reduction, den Werth von $\frac{k}{h}$, d. h. den von $\tang S$ daraus abzuleiten. Nun ist $\tang T$ offenbar die Grenze von $\tang S$, wenn der Punkt Q seine Lage ändert, um sich dem Punkte M zu nähern; in der angenommenen Gleichung $\tang T = A = \tang S + \alpha$ kann demnach α kleiner als irgend eine kleine Größe werden. Hat folglich der Werth $\frac{k}{h}$ von $\tang S$ die Form $p + \beta$, wo p eine unveränderliche Größe und β ein Ausdruck von h und k bedeutet, der mit diesen Veränderlichen so klein, als man nur immer will, werden kann; so zerfällt die Gleichung $A = p + \beta + \alpha$ in zwei andere, von denen die eine, $A = p$, den Werth von A bestimmt. A ist also der Werth des Verhältnisses von $k:h$, wenn man in solchem h und k Null macht. Hieraus folgern wir, daß man $y'+k$ und $x'+h$ für x' und y' in die Gleichung der Curve zu substituiren, daraus das Verhältniß von $k:h$ herzuleiten, und hierin endlich k und h Null zu setzen habe; das auf diese Weise gefundene Grenzverhältniß gibt uns den Werth von A, und sofort die Gleichung der Tangente (1).

Die unbestimmte Gerade MN, welche im Berührungspunkt M auf die Tangente senkrecht errichtet ist, heißt Normale; ihre Gleichung läßt sich leicht aus jener der Tangente herleiten, da diese beiden Geraden durch den Punkt M (x', y') gehen und überdies auf einander senkrecht stehen sollen. Die Gleichung unserer Normale ist

$$y - y' = -\frac{1}{A}(x-x') \quad (2).$$

Die beiden Stücke TP, PN der Abscissenachse vom Fußpunkte der Ordinate bis zum Durchschnittspunkte T der Tangente einerseits, und zum Durchschnittspunkte N der Normale anderseits, werden bezüglich Subtangente und Subnormale genannt. Setzen wir in unsern vorigen Gleichungen $y = o$, so erhalten wir für x die Abscissen der Durchschnittspunkte P und N.

Man findet auf diese Weise Subtangente TP oder $x' - x = \frac{y'}{A} \ldots$ (3). Subnormale PN oder $x - x' = Ay' \ldots$ (4).

Es könnte sich ereignen, daß die Tangente und die Normale nicht die in der Figur angenommene Lage hätten, daß die Subtangente $x-x$ und die Subnormale $x'-x$ wäre; das negative Zeichen, mit dem die Ausdrücke (3) und (4) in solchem Falle behaftet sind, würde jedoch

diesen Umstand anzeigen. Das bestimmte Stück MT der Berührungslinie heißt **Tangente**, so wie das Stück MN des darauf errichteten Perpendikels **Normale**.

§. 89. Wir wollen jetzt die eben angeführten Sätze auf die Parabel (Fig. 57) anwenden. Man hat, für die Parabel $y'^2 = 2px'$ und $(y'+k)^2 = 2p(x'+h)$, was sich auf $2ky'+k^2 = 2ph$ reducirt; hieraus $\frac{k}{h} = \text{tang}\, S = \frac{2p}{2y'+k}$. Für $k = o$ erhält man $A = \text{tang}\, T = \frac{p}{y'}$. Folglich

1) Gleichung der Tangente: $yy' = p(x+x')$;
2) Gleichung der Normale: $(y-y')p + (x-x')y' = o$;
3) Subtangente $TP = 2x'$;
4) Subnormale $PN = p$.

Die Subtangente ist also der doppelten Abscisse gleich, der Scheitel A liegt in der Mitte von TP, und der Fußpunkt T der Berührungslinie links vom Scheitel; ferner ist die Subnormale eine beständige Größe und dem halben Parameter oder der doppelten Focaldistanz AF gleich. Normale $MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \sqrt{(y'^2 + p^2)} = \sqrt{[p(2x'+p)]}$; Tangente $MT = \sqrt{2x'(p+2x')}$.

Anmerkung. Man kann diese Formeln auch so darstellen:
Normale $MN = \sqrt{2p(x'+\frac{1}{2}p)} = \sqrt{2pz}$,
Tangente $MT = 2\sqrt{x'(x'+\frac{1}{2}p)} = 2\sqrt{zx'}$, weil $x'+\frac{1}{2}p$ der Radiusvector z des Berührungspunktes ist.

Die Normale ist also immer die mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und dem Radiusvector; ferner die Tangente immer die mittlere Proportionale zwischen der vierfachen Abscisse und dem Radiusvector des Berührungspunktes.

§. 90. Wir suchen jetzt den Winkel $TMF = V$, welchen der Leitstrahl mit der Tangente bildet. Die Gleichung des durch die Punkte $M(x', y')$ und $F(\frac{1}{2}p, o)$ gehenden Strahls ist $y - y' = A'(x-x')$, wobei $A' = \frac{-y'}{\frac{1}{2}p - x'}$. Offenbar ist $\text{tang}\, V = \frac{A' - A}{1 + AA'}$, was, indem die Werthe von A und A' substituirt werden, gibt $\text{tang}\, V = \frac{y'^2 + \frac{1}{2}p^2 - px'}{\frac{1}{2}py' + x'y'} = \frac{p}{y'}$, wenn man berücksichtigt, daß $y'^2 = 2px'$, und den im Zähler und Nenner gemeinsamen Factor $\frac{1}{2}p + x'$ wegläßt.

Es ist also tang V = A = tang T, mithin das Dreieck TMF gleichschenklig. Die Lichtwärme und Schallstrahlen, welche parallel zur Achse auf die concave Oberfläche eines parabolischen Spiegels fallen, werden so reflektirt, daß sie sämmtlich durch den Punkt F gehen, woraus sich auch ergibt, warum dieser Punkt Brennpunkt genannt wird. Ueberdies halbirt die Tangente TM sowohl den Winkel, welchen der Leitstrahl mit der im Berührungspunkt zur Achse parallel gelegten, verlängerten Geraden QM bildet, als auch die Verbindungslinie QF, auf der sie zugleich senkrecht steht. Endlich ist FM = FT, was ein neues Mittel darbietet, die Tangente MT zu ziehen.

§. 91. Wir ändern jetzt den Berührungspunkt M(x′, y′), indem wir ihn successive an alle Orte der Curve verlegen und dabei die verschiedenen Lagen der Tangente untersuchen, welche durch die Gleichung tang $T = \frac{p}{y'}$, und durch die Ursprungsordinate $Ai = \frac{px'}{y'} = \frac{1}{2}y'$ bedingt sind. Hieraus ist ersichtlich: erstens, daß im Scheitel A, wo x′ und y′ Null sind, die Ordinatenachse die Curve berührt; zweitens, daß die Tangenten eine mit der Achse um so mehr parallele Lage annehmen, je weiter die Berührungspunkte vom Scheitel abstehen.

Ist die Richtung der Tangente oder A gegeben, so findet man $y' = \frac{p}{A}$ und sofort den Berührungspunkt. Wäre z. B. A = 1, so hätte man y′ = p und $x' = \frac{1}{2}p$; es bildet daher die in dem Punkt G der Parabel gezogene Tangente, für welchen die Ordinate durch den Brennpunkt geht, mit der Achse einen Winkel von 45°.

§. 92. Die Gleichung $yy' = p(x + x')$ kann dazu dienen, eine Tangente zu ziehen, ohne gerade den Berührungspunkt zu kennen, indem man anderweitige Bedingungen vorschreibt. Will man z. B., daß die Tangente durch einen gegebenen Punkt I(α, β) gehe, so wird unsere Gleichung $\beta y' = p(\alpha + x')$; zugleich ist auch $y'^2 = 2px'$. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man für die gesuchten Coordinaten des Berührungspunktes:

$$x' = \frac{\beta^2 - p\alpha \pm \beta\sqrt{(\beta^2 - 2p\alpha)}}{p},$$

$$y' = \beta \pm \sqrt{(\beta^2 - 2p\alpha)}.$$

Da jede einen doppelten reellen Werth zuläßt, so lange $\beta^2 > 2p\alpha$,

so folgt, daß von einem Punkt ausserhalb der Parabel zwei Tangenten an dieselbe gezogen werden können.

Man kann jedoch auch die Lage der Berührungspunkte bestimmen, indem man die Oerter der beiden vorigen Gleichungen, in welchen mithin x' und y' als veränderliche Größen angesehen werden, construirt. Der Ort der Gleichung $y'^2 = 2px'$ ist die gegebene Parabel, und der von $y'\beta = p(\alpha + x')$ offenbar eine gerade Linie, deren Lage bestimmt wird, wenn man nach und nach y' und $x' = o$ setzt. $y' = o$ gibt $x' = -\alpha$ und $x = o$ gibt $y' = \frac{p\alpha}{\beta}$. Die gerade Linie, welche gedachte Punkte der beiden Coordinatenachsen verbindet, wird die Parabel in den gesuchten Berührungspunkten schneiden. Der Ausdruck $x' = -\alpha$ wird derselbe bleiben für alle Punkte I, deren Abscissen $= \alpha$ sind, d. h. für alle Punkte der zur Achse der y parallel geführten Linie DI. Wenn also von verschiedenen Punkten einer zur Achse senkrechten Linie Tangenten-Paare an die Parabel gezogen werden, so gehen die Sehnen, welche die Berührungspunkte eines jeden Paars verbinden, alle durch denselben Punkt.

Anmerkung. Ist die gegebene Linie die Leitlinie, so ist $\alpha = -\frac{1}{2}p$; daher $x' = \frac{1}{2}p$, d. h. in diesem Falle gehen alle Verbindungssehnen durch den Brennpunkt.

Man kann auch leicht auf folgende Art eine Tangente ziehen: Es sei IM die verlangte Tangente. Dieselbe muß senkrecht auf QF stehen und letztere zugleich halbiren. I liegt daher eben, so weit von F als von Q entfernt. Der aus dem Mittelpunkt I mit dem Radius IF beschriebene Kreis geht demnach durch den Punkt Q der Directrix, welcher hiernach als bekannt anzusehen ist. Die zur Achse parallel gezogene Linie QM bestimmt hierauf den Berührungspunkt M; man erhält auch die gesuchte Tangente, wenn man auf QF die Senkrechte IM zieht.

So lange der Punkt I ausserhalb der Curve liegt, hat man nicht zu befürchten, daß der Kreis die Leitlinie nicht treffen werde; denn das Problem ist im vorliegenden Falle immer möglich und der Punkt Q nothwendigerweise vorhanden. Der Kreis schneidet die Directrix in einem zweiten Punkte, man erhält daher eine zweite Tangente.

§. 93. Wir schreiten zur Anwendung der nämlichen Prinzipien auf die Ellipse. Wir haben für diese Curve sofort

$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$, $a^2(y'+k)^2+b^2(x'+h)^2=a^2b^2$;

woraus $k(2y'+k)\,a^2+h\,(2x'+h)\,b^2=o$, $\frac{k}{h}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{2x'+h}{2y'+k}$.

Es ist dies der Werth von tang S, d. h. der Werth der trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels der durch zwei Punkte der Ellipse gehenden Secante mit der Abscissenachse. Um die Berührungslinie zu erhalten, setzt man h und k = Null, was uns gibt $A=-\frac{b^2x'}{a^2y'}$.

Die im §. 88 angeführten allgemeinen Formeln werden dadurch (Fig. 61):

1) Gleichung der Tangente, $a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2$;

2) Gleichung der Normale, $y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x')$;

3) Subtangente, $TP=\frac{a^2-x'}{x'}$;

4) Subnormale, $PN=\frac{b^2x'}{a^2}$.

Wir ziehen hieraus einige Folgerungen:

1) Der Werth von A ändert sich nicht, wenn x' und y' entgegengesetzte Zeichen erhalten, die durch die Punkte M und M' (Fig. 62) an die Curve gelegten Tangenten sind hiernach einander parallel.

2) Setzt man in der Gleichung der Tangente $y=o$, so hat man $CT=x=\frac{a^2}{x'}$; $a>x'$ gibt $CT>a$. Da CT von b unabhängig ist, so folgt, daß für alle auf einer und derselben Geraden AO als erste Achse construirten Ellipsen die einerlei Abscissen entsprechenden Tangenten TM, TQ... sich in einem und demselben Punkt T der Achse schneiden. Beschreiben wir daher über AO als Durchmesser einen Kreis AQO, so haben wir, um in dem Punkte M der Ellipse eine Tangente zu legen, nur nöthig, durch den betreffenden Punkt die Ordinate MP zu ziehen, und solche zu verlängern, bis sie den genannten Kreis in Q trifft, an den letztern dann die Tangente QT zu führen, und den entstehenden Durchschnittspunkt T derselben und der Abscissenachse mit dem Punkt M durch eine Gerade zu verbinden.

3) Setzen wir in der Gleichung der Normale $y=o$, so kommt (Fig. 61) $x=CN=\frac{a^2-b^2}{a^2}x'$; die Punkte N und M liegen also auf einer und derselben Seite der Achse Cy.

4) Die Subnormale erreicht ihren größten Werth für $x' = a$, und dieser ist $= \frac{b^2}{a} =$ dem halben Parameter.

Anmerkung. Man hat ferner:

$$\text{Tangente } MT = \frac{\sqrt{(a^4-(a^2-b^2)x^2)\,(a^2-x^2)}}{ax};$$

$$\text{Normale } MN = \frac{b}{a^2}\sqrt{[a^4-(a^2-b^2)x^2]}.$$

§. 94. Die Gleichungen der durch die Punkte O und A ($\pm a, o$) (Fig. 62) beliebig gezogenen Geraden ON, AN sind bezüglich $y = \alpha(x-a)$, $y = \alpha'(x+a)$. Für den Durchschnittspunkt N dieser Geraden haben wir $x = a\,\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha-\alpha'}$, $y = \frac{2a\alpha\alpha'}{\alpha-\alpha'}$, welcher Durchschnittspunkt nur insofern bestimmt ist, als man α, α' oder die Richtungen der Linien ON und AN kennt. Sind dieselben aber willkührlich, so kann man sie in der Art wählen, daß der fragliche Durchschnittspunkt auf der Ellipse liege; dergleichen Linien heißen dann Supplementarsehnen. In diesem Falle müssen dann unsere Werthe x und y auch noch der Gleichung der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ Genüge leisten, was uns gibt $a^2\alpha^2\alpha'^2 + b^2\alpha\alpha' = o$, oder $\alpha\alpha'(a^2\alpha\alpha' + b^2) = o$. Man drückt also das Zusammentreffen der Sehnen auf der Ellipse dadurch aus, daß man α oder α' gleich Null (was uns eigentlich nichts Neues lehrt), oder $\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$ setzt. Das Zeichen — kommt daher, daß α und α' entgegengesetzte Zeichen haben; denn ist der Winkel NAO spitz, so muß NOx stumpf sein. Beschreiben wir über der großen Achse einen Kreis, so ist der Winkel AN'O ein rechter, mithin ANO ein stumpfer. Man beweist auf ähnliche Art, daß die Supplementarsehnen der kleinen Achse einen spitzen Winkel miteinander bilden. — Diese Eigenschaften lassen sich übrigens auf analytischem Wege folgendermaßen darthun. Der von zwei Supplementarsehnen eingeschlossene Winkel ϑ wird durch die Gleichung bestimmt: $\tang \vartheta = \frac{\alpha-\alpha'}{1+\alpha\alpha'} = \frac{a^2 2\alpha + b^2}{\alpha(a^2-b^2)}$, wenn man nämlich α' eliminirt. Für $a = b$ ist $\tang \vartheta = \infty$, oder $\varphi = 90°$; die Supplementarsehnen des Kreises schneiden sich daher allein rechtwinklig, und zwar thun sie dies alle. Für $a > b$ haben α und $\tang \vartheta$ einerlei Zeichen; die Winkel ANO und NOx sind folglich zusammen stumpf. Wenn a und

b proportional wachsen, so ändert sich der Winkel ϑ nicht; die Richtungen der Linie ON und AN bleiben also dieselben, oder mit andern Worten, Ellipsen, deren Achsen in dem nämlichen Verhältniß stehen, haben ihre Supplementarsehnen parallel.

Für ein bekanntes ϑ ergibt sich α aus der Gleichung des zweiten Grades: $a^2\alpha^2-(a^2-b^2)\tan\vartheta\cdot\alpha+b^2=o$. Man hat folglich zwei Systeme von Supplementarsehnen, welche einen bestimmten Winkel ϑ mit einander bilden. Diese Sehnen sind leicht zu construiren. Beide Werthe von α haben, wegen des letzten Gliedes $+b^2$, einerlei Zeichen; sie werden einander gleich, wenn $(a^2-b^2)^2\tan^2\vartheta=4a^2b^2$; woraus folgt $\tan\vartheta=\frac{2ab}{a^2-b^2}$ und hierauf $\alpha=\frac{b}{a}$. Diese Auflösung bildet den Uebergang von den reellen Wurzeln zu den imaginären; unter allen Supplementarsehnen schließen also jene, welche im Endpunkt B der kleinen Achse zusammenlaufen, den größten stumpfen Winkel ein. Fällt AN mit AO zusammen, so steht die andere Sehne darauf senkrecht. Indem sich nun AN um den Punkt A dreht, wird der Winkel N stumpf und nimmt fortwährend zu, bis die Sehnen durch den Punkt B gehen. Fährt AN über diesen Punkt hinaus sich weiter fort zu bewegen, so nimmt der Winkel N ab und erlangt die nämlichen Werthe wie vorhin.

Um auf graphischem Wege die Supplementarsehnen, welche einen gegebenen Winkel mit einander machen, zu finden, muß man über AO ein Segment construiren, welches den gegebenen Winkel enthält; die Ellipse wird dadurch in zwei Punkten geschnitten, die zur gesuchten Auflösung gehören.

§. 95. Jede durch den Mittelpunkt C gezogene Linie CM (Fig. 62) hat zur Gleichung $y=A'x$. Soll diese Linie ausserdem durch den Punkt M (x', y') der Curve gehen, so muß $y'=A'x'$ sein. Nun hat man für die durch M gelegte Tangente $A=-\frac{b^2x'}{a^2y'}$; woraus folgt $AA'=-\frac{b^2}{a^2}=\alpha\alpha'$. Zieht man folglich eine Sehne AN zur Linie, welche den Mittelpunkt mit dem Berührungspunkt verbindet, parallel, so hat man $A'=\alpha'$, mithin $A=\alpha$, oder die Tangente TM ist zur Supplementarsehne NO parallel; es liefert dies ein neues sehr einfaches Mittel, eine Tangente an die Ellipse zu legen.

§. 96. Wir betrachten nun den Berührungspunkt an den verschiedenen Stellen der Curve und folgen der Tangente in allen ihren Lagen. In dem Punkt O, für welchen $x'=a$, $y'=o$, wird die Gleichung der Tangente: $x=a$; die Tangente läuft also mit der zweiten Achse parallel. Erhebt sich der Berührungspunkt auf der Curve, so nimmt x' ab und y' zu; $A = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$ nimmt folglich ab, und $CT = \frac{a^2}{x'}$ dagegen zu. Der Punkt T rückt also immer weiter fort und der Winkel MTC wird stets kleiner, bis zu dem Punkt B, wo die Tangente mit der ersten Achse parallel läuft. Die symmetrische Lage der Curve überhebt uns der Mühe, diese Untersuchung weiter fortzusetzen. Es existirt also kein Winkel, der nicht dieser oder jener Tangente entspräche.

Soll die Tangente die Ellipse unter einem gegebenen Winkel gegen die erste Achse berühren, so findet man den Berührungspunkt (x', y') mittelst der Gleichungen $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$, $Aa^2y'+b^2x'=o$, wo A bekannt ist. — Man kann eine große Anzahl von Problemen, die auf die Tangente Bezug haben, auf ähnliche Art behandeln.

§. 97. Wir wollen die Segmente OH, AK (Fig. 61) finden, welche eine beliebige Tangente KH auf den durch die Scheitelpunkte gelegten Tangenten abschneidet. Man hat $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$; setzt man daselbst $x = \pm a$, so sind y unsere beide Segmente, nämlich $OH = b^2 \cdot \frac{a-x'}{ay'}$, $AK = b^2 \cdot \frac{a+x'}{ay'}$. Das Produkt dieser beiden Größen reducirt sich auf b^2: das Produkt der durch eine beliebige Tangente entstandenen Segmente OH, AK ist folglich constant und dem Quadrat der halben kleinen Achse gleich.

§. 98. Wir wollen die Winkel suchen, welche die Leitstrahlen mit der Tangente bilden. Es seien $CF = c$, die Winkel $FMT = V$, $F'MT = V'$ (Fig. 61). Die Gleichung der durch die Punkte F(c, o) und M(x', y') gehenden Geraden FM ist $y = A'(x-c)$, wo $A' = \frac{y'}{x'-c}$. Für den Neigungswinkel der Tangente hat man ferner $A = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$. Diese Werthe in $\tang V' = \frac{A-A'}{1+AA'}$ substituirt geben, wegen $c^2 = a^2 - b^2$, $\tang V = \frac{b^2}{cy'}$. Vertauscht man c mit — c, so er-

hält man tang $V' = -\frac{b^2}{cy'}$. Diese Werthe zeigen, daß sich die Winkel V und V' zu 180° ergänzen, oder daß der Winkel FMT + F'MT = 180° ist, oder daß die spitzen Winkel F'MI und FMT gleich sind. Die Leitstrahlen irgend eines Punktes der Ellipse bilden also mit der Tangente an diesem Punkte gleiche Winkel. Gelangen also aus dem einen Brennpunkt F' einer Ellipse Licht-Wärme oder Schallstrahlen F'M auf eine elliptische concave Spiegelfläche, so wird jeder dieser Strahlen dergestalt zurückgeworfen, daß er durch den andern Brennpunkt geht. Verlängert man F'M, so halbirt die Tangente TM den Winkel FMG, und die Normale MN den Winkel F'MF.

§. 99. Die eben entwickelte Eigenschaft gibt ein Verfahren an die Hand, an die Ellipse von einem gegebenen Punkte aus, dieser mag auf der Curve selbst oder ausserhalb derselben liegen, eine Tangente zu ziehen. Liegt der gegebene Punkt M auf der Ellipse, so zieht man die beiden Leitstrahlen FM, F'M und verlängert den letztern um das Stück MG = FM, zieht dann FG und fällt darauf endlich aus M das Perpendikel MT.

Liegt der gegebene Punkt I ausserhalb der Curve, so betrachte man für einen Augenblick das Problem als gelöst. Der Punkt I findet sich nach dem Gesagten eben so weit von F als G entfernt; der aus dem Mittelpunkt I mit dem Halbmesser IF beschriebene Kreis geht daher auch durch den Punkt G. Ferner ist F'G = F'M + MF = AO; der Punkt G liegt hiernach auch auf dem aus F' als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser AO beschriebenen Kreis. Der durch die beiden eben erwähnten Kreise bestimmte Punkt G mit F' verbunden gibt sofort den gesuchten Berührungspunkt M. Sicher ist es übrigens, daß die beiden Kreise einander schneiden werden, weil widrigenfalls der Punkt G nicht existirte und das Problem absurd sein würde; was nicht sein kann, so lange der Punkt I ausserhalb der Ellipse liegt. Man erhält den zweiten Berührungspunkt, wenn man den zweiten Durchschnittspunkt beider vorhin erwähnten Kreise mit dem andern Brennpunkt F verbindet.

Man kann das letzte Problem noch auf die im §. 92 angegebene Art behandeln. Es seien deshalb α, β die Coordinaten des ausserhalb der Ellipse liegenden Punktes; es handelt sich um die Bestimmung

des Berührungspunktes (x', y'). Man hat zu diesem Zweck die beiden Gleichungen $a^2\beta y' + b^2\alpha x' = a^2 b^2$, $a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2$; wir erhalten daraus für die Coordinaten des Berührungspunktes:

$$x' = \frac{a^2 b^2 \alpha \pm a^2 \beta \sqrt{(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2 b^2)}}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2},$$

$$y' = \frac{a^2 b^2 \beta \pm b^2 \alpha \sqrt{(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2 b^2)}}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Es gibt also überhaupt zwei Berührungspunkte M, M', mithin zwei Tangenten IM, IM', wenn $a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 > a^2 b^2$, d. h. so lange der gegebene Punkt (α, β) ausserhalb der Ellipse liegt. Man kann auch hier die Lage der Berührungspunkte finden, wenn man die Oerter der beiden Gleichungen $a^2\beta y' + b^2\alpha x' = a^2 b^2$, $a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2$ construirt, in welchen x' und y' die veränderlichen Größen sind. Der Ort der zweiten Gleichung ist die gegebene Ellipse, und der Ort der ersten eine gerade Linie MM', deren Lage bestimmt wird, indem man x' und y' nach und nach $= 0$ setzt. $y' = 0$ gibt $x' = \frac{a^2}{\alpha}$ und $x' = 0$ gibt $y' = \frac{b^2}{\beta}$. Nachdem also auf die Coordinatenachsen bezüglich die Stücke $CX = \frac{a^2}{\alpha}$ und $CY = \frac{b^2}{\beta}$ aufgetragen sind, verbindet man die Punkte X und Y; es wird diese Linie die Ellipse in den gesuchten Berührungspunkten M, M' schneiden. — Da $CX = \frac{a^2}{\alpha}$ von β unabhängig ist, so wird es dasselbe bleiben für alle Punkte, deren Abscisse $= \alpha$ sind, d. h. für alle Punkte der durch I parallel zu Cy gezogenen Linie. Wenn also von verschiedenen Punkten einer geraden Linie, die parallel mit der Achse Cy läuft, Tangentenpaare an die Ellipse gezogen werden, so gehen die Sehnen, welche die zugehörigen Berührungspunkte verbinden, sämmtlich durch den nämlichen Punkt der Abscissenachse. Dieser Punkt bleibt sogar derselbe, wenn die zweite Achse sich ändert; er hat also die nämliche Lage für den aus C mit dem Radius a beschriebenen Kreis. Der gedachte Punkt, dessen Abscisse $x = \frac{a^2}{\alpha}$, liegt innerhalb oder ausserhalb der Ellipse, je nachdem $\alpha >$ oder $< a$ ist, d. h. je nachdem die von I auf die Abscissenachse gefällte Senkrechte sich ausserhalb der Curve befindet oder sie schneidet.

Anmerkung. Aehnliches gilt auch von den Punkten, welche auf der mit der Abscissenachse parallel geführten Geraden liegen, in Bezug auf den in der Ordinatenachse befindlichen Punkt Y, weil $CY = \frac{b^2}{\beta}$ von α und a unabhängig ist.

§. 100. Wir kommen jetzt zur Hyberbel. Man könnte alle für die Ellipse ausgeführten Rechnungen hier wiederholen; es reicht aber hin, wie wir es in §. 80 gesehen haben, in den letztern $-b^2$ statt b^2 zu setzen. Wir finden alsdann folgende Resultate:

1) Für den Neigungswinkel der im Berührungspunkte (x', y') gezogenen Tangente ist $A = \frac{b^2x'}{a^2y'}$, und für die Gleichung dieser Linie $a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2$. Die Tangente TM (Fig. 54) bildet mit der Achse der x einen spitzen Winkel, sie ist der durch den Punkt M' geführten Tangente parallel.

Die Gleichung der Normale ist $y - y' = -\frac{a^2}{b^2}\frac{y'}{x'}(x - x')$.

2) $CT = \frac{a^2}{x'}$ zeigt, daß die Punkte M und T auf der nämlichen Seite der Achse Cy liegen. Da $x' > a$ ist, so liegt T zwischen C und dem Scheitel A. Subtangente $= \frac{x'^2 - a^2}{x'}$; Subnormale $= \frac{b^2x'}{a^2}$.

Anmerkung. Normale $= \frac{b}{a^2}\sqrt{[(a^2+b^2)\,x^2 - a^4]}$;

$$\text{Tangente} = \frac{\sqrt{([a^2+b^2]x^2 - a^4)\,(x^2 - a^2)}}{ax}.$$

3) Für die beiden Supplementarsehnen ON und AN (Fig. 63) hat man $\alpha\alpha' = \frac{b^2}{a^2}$; die beiden mit der Achse gebildeten Winkel sind also zugleich spitz oder stumpf.

Die Gleichung der durch die Punkte A (a, o) und N (x', y') gehenden Geraden ist $y' = \alpha(x - a)$, wo $\alpha = \frac{y'}{x' - a}$. Weil $x' > a$ ist, so haben α und y' einerlei Zeichen. Bei den wie N liegenden Punkten sind also die Winkel der Supplementarsehnen mit der Abcissenachse spitz, während sie für den entgegengesetzten obern Zweig stumpf sind.

Anmerkung. Ist die Hyperbel gleichseitig, so ist $\alpha\alpha' = 1$; in der gleichseitigen Hyperbel bilden daher die Supplementarsehnen der ersten Achse spitze Winkel mit derselben, deren Oeffnung nach einerlei Richtung liegt und deren Summe einen Rechten ausmacht. Die im Kreise auf ähnliche Art gezogenen Linien bilden gleichfalls mit der Achse spitze Winkel, deren Summe einen rechten beträgt; sie haben aber ihre Oeffnungen nach entgegengesetzten Richtungen.

4) Für die Linie CM und die Tangente TM hat man $AA' = \frac{b^2}{a^2}$; hieraus folgt, daß das für die Ellipse im §. 95 gegebene Verfahren, an dieselbe eine Tangente zu ziehen, hier seine Anwendung findet. Man verbindet demnach den Berührungspunkt M mit dem Mittelpunkt C, zieht hierauf ON parallel zu CM; die gesuchte Tangente läuft der Supplementarsehne NA parallel.

5) Der Winkel ϑ, welchen die Supplementarsehnen mit einander bilden, wird durch die Gleichung $\tang \vartheta = \frac{a^2\alpha^2 - b^2}{\alpha(a^2 + b^2)}$ bestimmt. Der Winkel ϑ bleibt derselbe, wenn sich die Achsen in dem nämlichen Verhältniß ändern.

6) Ist ϑ bekannt und α unbekannt, so hat man die Gleichung vom zweiten Grade $a^2\alpha^2 - \alpha(a^2 + b^2) \tang \vartheta = b^2$ aufzulösen, deren Wurzeln stets reell sind und verschiedene Zeichen haben. Bei der Ellipse muß der gegebene Winkel innerhalb gewisser Grenzen liegen; bei der Hyperbel findet jedoch eine solche Beschränkung nicht statt. Man kann die beiden Auflösungen dadurch construiren, daß man über AO einen Kreisabschnitt beschreibt, der den Winkel ϑ faßt, welchen die Supplementarsehnen mit einander bilden sollen, und von jedem Durchschnittspunkt gerade Linien nach den beiden Scheiteln zieht.

Anmerkung. Setzt man in $\tang \vartheta = \frac{a^2\alpha^2 - b^2}{\alpha(a^2 + b^2)}$, für α seinen Werth $\frac{y'}{x'-a}$; so kommt $\tang \vartheta = \frac{2ab^2}{y'(a^2+b^2)}$. Hieraus folgt, daß der von zwei Supplementarsehnen gebildete Winkel spitz ist. Für $y' = o$ ist $\tang \vartheta = \frac{1}{o}$, mithin ϑ ein rechter; für $y' = \frac{1}{o}$ ist $\vartheta = o$: der spitze Winkel ϑ, den die Supplementar-

sehnen auf der Hyperbel bilden, kann daher durch alle Grade der Größe zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ gehen.

7) Die von den Leitstrahlen und der Tangente eingeschlossenen Winkel behalten den nämlichen Werth $\frac{b^2}{\alpha y'}$. In der Hyperbel halbirt also die Tangente MT den Winkel, welchen die beiden Leitstrahlen an dem Berührungspunkt bilden. Ferner halbirt die Normale den Winkel, welcher von dem einen Leitstrahl und der Verlängerung des andern an jenem Punkte eingeschlossen wird.

8) Das im §. 98 befolgte Verfahren, um an die Ellipse eine Tangente zu führen, findet demnach auch hier statt. Liegt der gegebene Punkt M (Fig. 54) auf der Hyperbel, so zieht man die beiden Leitstrahlen FM, F′M und halbirt den Winkel FMF′ durch die Gerade MT. Liegt der Punkt I ausserhalb der Curve, so beschreibt man aus dem gegebenen Punkt I mit der Entfernung IF als Halbmesser einen Kreisbogen FG, dann aus dem zweiten Brennpunkt F′ mit einem Radius $F'G = F'M - FM = AO$ einen zweiten Kreisbogen, der den ersten in zwei Punkten G schneiden wird. Diese sodann mit dem letztgenannten Brennpunkte verbunden, bestimmen in den Durchschnittspunkten der Hyperbel die verlangten Berührungspunkte. — Die für die Ellipse im §. 97 und 99 entwickelten Eigenschaften haben hier gleichfalls statt.

Anmerkung. Ein Licht- oder Wärmestrahl, welcher von F ausgeht, wird von dem hyperbolischen Hohlspiegel in M dergestalt zurückgeworfen, als wenn er von F′ aus in gerader Richtung nach K zu ginge. Man sieht von selbst, daß hier die Punkte F und F′ keine physischen Brennpunkte sind.

§. 101. Wir betrachten jetzt den Berührungspunkt M (Fig. 64) an verschiedenen Stellen der Curve. Im Punkt A (a, o) ist die Gleichung der Tangente $x = a$; die zur Achse der y parallel gelegte Gerade DD′ berührt also im Scheitel die Curve. Wenn der Punkt M weiter fortrückt, muß man, um die successiven Lagen der Tangente kennen zu lernen, den Fußpunkt T und die verschiedenen Neigungswinkel derselben bestimmen. Man kann aber diese Winkel nicht gut aus dem Werth von $A = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}$ herleiten, weil x′ und y′ zugleich wachsen.

Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, substituiren wir anstatt ay' seinen Werth $\pm b\sqrt{(x'^2-a^2)}$; es kommt dadurch, wenn wir oben und unten mit bx' dividiren, $A = \frac{\pm b}{a\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x'^2}\right)}}$, $CT = \frac{a^2}{x'}$.

Hieraus erhellet, daß in dem Maß, wie x wächst, A und CT abnehmen, dergestalt, daß einerseits der Punkt T sich fortwährend dem Punkt C nähert, ohne ihn je erreichen zu können, und anderseits A sich der Größe $\pm\frac{b}{a}$ stets nähert, welche mithin als seine Grenze betrachtet werden muß.

Für den Fall nur, daß $x' = \infty$, wird $A = \pm\frac{b}{a}$ und $CT = 0$. Wegen der Symmetrie der Curve ist es unnöthig, die Bewegung des Punktes M auf die andern Theile der Curve auszudehnen. Um diese Ausdrücke zu construiren, tragen wir im Scheitel A die Ordinaten AD = AD' = b auf, und ziehen dann CD und CD'. Die Gleichungen dieser Linien sind $y = \pm\frac{b}{a}x$; es sind dieselben die Grenzen aller Tangenten, und erreichen die Curve erst in der Unendlichkeit: unsere Curve liegt also ganz innerhalb des Winkels QCQ' und seines Scheitelwinkels.

Da die Tangente mit der ersten Achse einen Winkel, der zwischen DCA und einem rechten enthalten ist, bildet; so kann einer gegebenen, durch C gehenden Geraden nur insofern eine Tangente parallel gezogen werden, als CI in dem Winkel QCH liegt.

Von den Asymptoten der Hyperbel und Einiges noch über die Methode der Tangenten.

§. 102. Erstrecken sich zwei Curven ins Unendliche, so sagt man die eine ist eine Asymptote der andern, wenn sie sich derselben immer mehr und mehr nähert, und bei gehöriger Entfernung der Abstand beider Linien kleiner werden kann als jede noch so kleine Größe. Die Gleichung der Hyberbel ist

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)} = \pm\frac{b}{a}\,x\left(1-\frac{a^2}{2x^2}-\frac{a^4}{8x^4}\cdots\right);$$

wenn man $\sqrt{(x^2-a^2)}$ in eine Reihe entwickelt. (Niedere Algeb. §. 45).

In sämmtlichen Gliedern, mit Ausnahme des erstern, kommt x nur im Nenner vor, sie nehmen daher alle ohne Ende ab, in dem Maß wie x wächst. Die Differenz MQ zwischen der Curve-Ordinate y (PM) und den den beiden Geraden CQ, CQ′ (Fig. 64) entsprechenden Ordinaten Y, wie PQ, deren Gleichungen sind $Y = \pm \frac{b}{a} x$, kann demnach auf jeden beliebigen Grad von Kleinheit gebracht werden. Diese geraden Linien, welche wir als Grenzen der Tangenten erkannt haben, sind folglich die Asymptoten der Hyperbel. — Im Fall die Hyperbel gleichseitig, oder $a = b$ ist, werden die Asymptoten einen rechten Winkel einschließen.

§. 103. Eliminiren wir y zwischen der Gleichung der Hyperbel und der einer beliebigen geraden Linie $y = kx + l$, so finden wir für die Coordinaten der Durchschnittspunkte

$$(a^2k^2 - b^2)x^2 + 2a^2klx + a^2(l^2 + b^2) = o.$$

Diese Gleichung vom zweiten Grade reducirt sich auf eine vom ersten, wenn $a^2k^2 = b^2$, oder $k = \pm \frac{b}{a}$. In dem letztern Fall erhält man $x = -\frac{l^2 + b^2}{2kl}$; d. h. eine zu den Asymptoten parallel geführte Gerade schneidet die Curve nur in einem Punkt (der zweite Durchschnittspunkt liegt in der Unendlichkeit). Im Allgemeinen findet man $x = -\frac{a^2kl \pm ab\sqrt{(l^2 + b^2 - a^2k^2)}}{a^2k^2 - b^2}$. Dieser Werth für x in die Gleichung $y = kx + l$ substituirt, gibt die correspondirenden Werthe für y, in welchen Ausdrücken die Wurzelgröße die nämliche wie in denen von x ist. Damit die Gerade die Hyperbel treffe, müssen x und y reell sein. Wir unterscheiden drei Fälle: nämlich: $a^2k^2 = <$ oder $> l^2 + b^2$.

Im ersten Fall hat die Gerade nur einen Punkt mit der Hyperbel gemein: die zwei Wurzeln unserer quadratischen Gleichung sind gleich, die Durchschnittspunkte fallen mithin zusammen, und die gerade Linie berührt die Hyperbel. Hieraus kann man ein Verfahren herleiten, von einem gegebenen Punkt (α, β) ausserhalb der Hyperbel eine Tangente an dieselbe zu ziehen. Die Gleichung unserer gesuchten Geraden ist $y - \beta = k(x - \alpha)$. Man sieht, daß $l = \beta - k\alpha$; diese Gleichung verbunden mit der Relation $a^2k^2 = l^2 + b^2$ bestimmt die Werthe von k und l.

In dem zweiten Fall gibt es zwei Durchschnittspunkte. Setzen wir $a^2 k^2 = l^2 + b^2 - \delta^2$, so kommt $x = - a \cdot \frac{akl \pm b\delta}{l^2 - \delta^2}$. Für den Fall, daß die Gerade durch das Centrum geht, ist $l = o$, $x = \pm \frac{ab}{\delta}$ $y = \pm \frac{kab}{\delta}$, $k = \frac{\sqrt{(b^2 - \delta^2)}}{a} < \frac{b}{a}$. Jede Gerade MM′ (Fig. 54), welche durch den Mittelpunkt C geht und innerhalb des Asymptotenwinkels liegt, schneidet demnach die Curve in zwei entgegengesetzten Punkten M und M′, deren Abscissen gleich und rücksichtlich der Zeichen entgegengesetzt sind; dasselbe findet in Bezug auf die Ordinaten und die Stücke CM und CM′ statt.

Im dritten Fall wird die Curve von der Geraden nicht geschnitten. Für $l = o$ hat man $ak > b$, d. h. die Gerade geht durch den Mittelpunkt und liegt innerhalb des Winkels QCH (Fig. 64); sie läuft zu zwei Tangenten parallel, während im Gegentheil jede innerhalb des Winkels QCQ′ befindliche gerade Linie die Curve schneidet und zu keiner Tangente parallel ist.

§. 104. Wir wollen die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf ihre Asymptoten entwickeln und dazu die Cb′ zur Abscissenachse, jene Cb zur Ordinatenachse nehmen (Fig. 65). Man ziehe PM parallel zu Cb, und setze $CP = x'$, $PM = y'$. Die Tangente des Winkels xCb (α) ist $= \frac{b}{a}$. Hieraus folgt, wenn man, der Kürze halber, $2m = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ macht, $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{a}{2m}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{b}{2m}$. Die allgemeinen Formeln (§. 65) werden dadurch $2mx = a(y' + x')$, $2my = b(y' - x')$.

Im Scheitel A, wo $y = o$, hat man $y' = x'$, $CD = DA$; die Figur CBAD ist folglich eine Raute. Es ergibt sich dies auch daraus, daß Winkel DAC = DCA. Substituiren wir die für x und y gefundenen Werthe in die Gleichung der Hyperbel $a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$, so erhält man $x'y' = m^2$ für die gesuchte Gleichung. Für $x' = y'$ hat man $CD = m = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$. Wenn man die positiven x und y nach den Richtungen Cb und CH′ nimmt, so ist die Gleichung $xy = - m^2$. Man nennt m^2 die Potenz der Hyperbel. Für die gleichseitige Hyperbel ist CBAD ein Quadrat $= m^2 = \frac{1}{2}a^2$.

Aus der Gleichung $xy = m^2$ folgt, daß y immer mehr abnimmt, je größer x wird, und umgekehrt; was genau mit den Eigenschaften der Asymptoten übereinstimmt. Wir haben gefunden, daß $a = 2m \cos\alpha$, $b = 2m \sin\alpha$. Die Achsen der Hyperbel sind hiernach als bekannt anzusehen, wenn man die Gleichung der Curve, auf ihre Asymptoten bezogen, hat. Uebrigens geben die Diagonalen CA, DB der Raute die Auflösung dieses Problems; denn aus $2m \sin\alpha = b$ und $DL = CD \sin\alpha$ folgt $BD = b$.

Anmerkung. Soll die Lage oder Größe der Achsen aus dem gegebenen Asymptotenwinkel 2α und einem Punkte $M(x', y')$ der Curve bestimmt werden, so halbirt man zuvörderst den Asymptotenwinkel, um die Lage der ersten Achse zu erhalten; die auf der letztern, im Scheitel der Asymptoten errichteten Senkrechten bestimmt die Lage der zweiten Achse. Um die Größe der Achsen zu finden, hat man $\frac{a^2 + b^2}{4} = x'y'$ und $\tang\alpha = \pm \frac{b}{a}$ oder $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{b^2}{a^2}$. Wird hierin für b^2 sein Werth aus der unmittelbar vorhergehenden Gleichung substituirt, so kommt $(4x'y' - a^2)\cos^2\alpha = a^2 \sin^2\alpha$, oder $a = 2\cos\alpha\sqrt{x'y'}$; hierauf $b = 2\sin\alpha\sqrt{x'y}$.

§. 105. Durch Multiplication von $xy = m^2$ mit $\sin 2\alpha$ entsteht $xy \sin bCb' = 2m^2 \sin\alpha \cos\alpha$. Das erste Glied drückt den Flächeninhalt des Parallelogramms CPMQ aus; dasselbe ist folglich constant, welchen Punkt man auch auf der Curve nehmen mag. Da das zweite Glied $= \frac{1}{2}ab$ ist, so beträgt der Flächeninhalt von CPMQ die Hälfte des aus den halben Achsen construirten Rechtecks. Es ist dies auch eine Folge von dem, daß $CA = a$, $BD = b$ und $CBAD = CPMQ$.

§. 106. Eine ähnliche Transformation würde die Gleichung der Tangente im Punkte $M(x', y')$, auf die Asymptoten bezogen, geben; man findet sie aber unmittelbar wie folgt: Die Gleichung dieser Linie ist $y - y' = A(x - x')$, wobei $A = \frac{\sin STH'}{\sin TSC}$. Setzen wir in die Gleichung $x'y' = m^2$ statt x' und y' die Werthe $x' + h$ und $y' + k'$, wie wir in §. 88 gethan; so haben wir $(x' + h)(y' + k) = m^2$; wo-

raus $\frac{k}{h} = -\frac{y'+k}{x'}$. Es ist dies der Werth von A für die Secante MN, dessen Grenze sich auf die Tangente bezieht; in dem letztern Fall wird $A = -\frac{y'}{x'}$, woraus für die gesuchte Gleichung entsteht $x'y + y'x = 2m^2$. Wird $y = o$ gesetzt, so findet man $x = \frac{2m^2}{y'} = 2x'$, Abscisse CT des Fußpunktes der Tangente, mithin das Doppelte von CP. Um die Tangente im Punkte M zu erhalten, macht man also TP = CP und zieht TM. Aus der Gleichheit der Dreiecke SMQ und MTP folgt, daß der Berührungspunkt in der Mitte von ST liegt.

Weil $CT = 2x'$ und $CS = 2y'$, so ist die Fläche des Dreiecks $CST = 2x'y' \sin 2\alpha = ab$; oder mit andern Worten: wenn die Tangente irgend eines Punktes verlängert wird, bis sie die Asymptoten trifft, so ist der Inhalt des abgeschnittenen Dreiecks constant; er ist gleich dem Rechtecke der halben Achsen. Auch sind die vier Dreiecke TMP, CMP, CMQ, SMQ gleichgeltend.

§. 107. Die Gleichung einer Secante bb′ ist $y = Kx + L$. $y = o$ gibt den Durchschnittspunkt b′ derselben mit der Asymptote, nämlich $Cb' = -\frac{L}{K}$. Durch Elimination erhält man für die Abscissen der Durchschnittspunkte der Secante mit der Curve die Gleichung $Kx^2 + Lx = m^2$. Da nun $-\frac{L}{K}$ = der Summe der Wurzeln $= Ca' + aN = Cb' = Ca' + a'b'$, so ist $aN = a'b'$ und Dreieck $Nab = N'a'b'$, mithin $bN = b'N'$. Die zwischen jedem Zweige und den zugehörigen Asymptoten liegenden Theile irgend einer Secante sind also einander gleich. Hieraus ergibt sich ein einfaches Verfahren, die Hyperbel zu beschreiben, wenn man die Asymptoten und einen einzigen Punkt N hat. Man zieht durch diesen Punkt eine beliebige Gerade bb′ und nimmt $b'N' = bN$; hierdurch erhält man einen neuen Punkt N′ der Curve. Durch Wiederholung dieser Construction für andere Geraden, findet man so viel Punkte, als man will.

Anmerkung. Um die aus der Menge der durch den Punkt N

gehenden Linien entstehende Unsicherheit zu vermeiden, kann man den Punkt N nach und nach durch andere bereits gefundene ersetzen und durch solche die Secanten ziehen.

§. 108. Es seien x', x'' die Abscissen aN, Ca' der Punkte N und N' (Fig. 65). Die Auflösung der Dreiecke abN, bN'O gibt Nb $= x' \cdot \frac{\sin a}{\sin b}$, $N'b = Nb' = x'' \frac{\sin a}{\sin b}$. Durch Multiplication der beiden letztern Gleichungen entsteht $bN \times Nb' = x'x'' \cdot \frac{\sin^2 a}{\sin^2 b} = -\frac{m^2}{K} \cdot \frac{\sin^2 a}{\sin^2 b}$, wegen des letztern Gliedes der Gleichung $Kx^2 + Lx = m^2$. Da dieses Produkt von L unabhängig ist, so würde es jede zu unserer Secante parallel geführte Gerade gleichfalls gegeben haben. Zwei Secanten geben folglich für das Produkt $bN \times b'N$ den nämlichen Werth wie das Quadrat der halben Tangente SM, vorausgesetzt, daß die drei erwähnten Geraden einander parallel sind.

§. 109. Die im §. 88 angeführte Methode, um das in der Gleichung (1) enthaltene A zu finden, läßt sich, welches auch der Coordinatenwinkel sein mag, auf jede Gleichung anwenden. Man sieht, wenn die gegebene Vorschrift mit Aufmerksamkeit verfolgt wird, daß man in der verlangten Gleichung $x' + h$ statt x, und $y' + k$ statt y setzen muß, was zwei Arten von Gliedern gibt, nämlich: 1) solche, in welchen weder h noch k vorkommen und die durch ihr Zurückbleiben, wenn die eben erwähnten Zuwachse Null sind, zusammen die Gleichung der Curve wieder bilden und sich gegen einander aufheben; 2) Glieder, in denen h und k als Factoren auftreten, die dazu bestimmt sind, das Verhältniß von $k : h$ zu ermitteln, für welches man A substituirt, indem k und h Null gesetzt werden. Es ist aber klar, daß die in diesem Verhältniß verschwindenden Glieder gerade diejenigen sind, in welchen h und k auf einem höhern, den ersten übersteigenden Grad erscheinen. Hieraus ergibt sich, wenn das Raisonnement weggelassen und blos das Ergebniß der Rechnung berücksichtigt werden soll, folgende Regel: 1) Man vertausche x mit $x + h$ und y mit $y + k$ und entwickle hierauf, indem dabei nur die Glieder von der ersten Dimension in h und k beibehalten werden; 2) man mache $k = Ah$ und dividire das Ganze durch den gemeinschaftlichen Factor h; 3) man suche endlich hieraus den Werth von A. Durch Einführung des gefundenen Werthes von

A in die Gleichungen (1) und (2) erhält man jene der Tangente und Normale.

Für das Beispiel $y^2 + 2xy = 2y + x$ erhält man zuvörderst $2yk + 2xk + 2yh = 2k + h$, alsdann $2yA + 2xA + 2y = 2A + 1$, woraus $A = -\frac{y + \frac{1}{2}}{y + x - 1}$. Der Punkt (1, 1) z. B. gehört unserer Curve an, weil seine Coordinaten, für x und y gesetzt, der vorgelegten Gleichung Genüge thun. Man findet hier $A = -\frac{1}{2}$, mithin ist die Gleichung der durch den fraglichen Punkt gehenden Tangente: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1)$, oder $2y + x = 3$.

Es sei noch die Gleichung $y^2 = mx + nx^2$, welche unsern drei früher behandelten Curven angehört, je nachdem die Werthe von m und n beschaffen sind (§. 85). Man findet $2yk = mh + 2nhx$, $2Ay = m + 2nx$, woraus $A = \frac{\frac{1}{2}m + nx}{y}$.

§. 110. Wenn die Tangente parallel zur Achse der x läuft, so ist es klar, daß, wenn der Zweig der Curve ganz unterhalb oder oberhalb der Tangente liegt, das y des Berührungspunktes $>$ oder $<$ als die benachbarten y ist. Die Gleichung $A = 0$ bestimmt also dasjenige y, welches ein Maximum oder ein Minimum ist; man findet dasselbe dadurch, daß man die Elimination der Variabeln x und y zwischen $A = 0$ und der vorgelegten Gleichung bewerkstelligt. $A = \infty$ gibt die zu der Achse der y parallel laufende Tangente, d. h. die Grenzen der Curve in der Richtung der x. Es sei z. B. die Gleichung $y^2 - xy + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$, für welche man findet $A = \frac{y - x + 1}{2y - x}$. Setzt man $y - x + 1 = 0$ und eliminirt zwischen ihr und der vorgelegten Gleichung, so erhält man $x = 3$ und 1, $y = 2$ und 0 für die Coordinaten der Punkte, wo die Tangente parallel zur Achse der x ist. 2 ist die größte, 0 die kleinste Ordinate. Die Curve erstreckt sich nicht unterhalb der Achse der x, welche sie in dem Punkte (1, 0) berührt. $2y - x = 0$ gibt $x = 2 \pm \sqrt{2}$, $y = 1 \pm \sqrt{2}$, Coordinaten der Seitengrenzen.

§. 111. Sind die Gleichung einer Curve vom zweiten Grad und die einer geraden Linie $y = \alpha x + \beta$ gegeben, so wird man die Durchschnittspunkte dieser Linie finden, wenn man die beiden Gleichungen mit einander combinirt. Die Elimination von y liefert uns in Bezug

auf x eine Gleichung vom zweiten Grade von der Form $ax^2+bx+c = o$. Die Abscissen der zwei Durchschnittspunkte sind

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}.$$

Die Curve wird von der Geraden geschnitten oder nicht geschnitten, je nachdem die Wurzeln reell oder imaginär sind. Wenn $b^2 - 4ac = o$, so sind die beiden Wurzeln unserer quadratischen Gleichung einander gleich, und die Gerade berührt die Curve. Denn sind α und β willkührlich, so wird, wenn man sie sich ändern läßt, die Gerade verschiedene Lagen erhalten, und die beiden Durchschnittspunkte immer mehr an einander rücken, je kleiner $b^2 - 4ac$ ist. Im Falle daß $b^2 - 4ac = o$, reduciren sich diese beiden Durchschnittspunkte auf einen, wodurch eine Relation zwischen α und β hervorgeht, damit sich unsere Gerade in eine Tangente verwandle. Die eine dieser Constanten bleibt willkührlich; man kann dieselbe verschiedenen Bedingungen gemäß bestimmen, was zu einer großen Anzahl von Problemen Anlaß gibt.

Für die Abscisse des Berührungspunktes hat man $x = -\frac{b}{2a}$. In dem letztern Fall, wobei α und β gegeben sind, ist unsere Gleichung in x ein vollkommenes Quadrat, woraus man erkennt, daß die Gerade eine Tangente ist, und sofort der Berührungspunkt sich ergibt. So z. B. erhält man durch Elimination von y zwischen $3y = 4x + 2$ und $y^2 - 2xy + 2x^2 + 4x - 5y + 4 = o$ die Gleichung $x^2 - 2x + 1 = o = (x-1)^2$; die Gerade berührt demnach die Curve in dem Punkt, für welchen $x = 1$ und $y = 2$. — Macht man in einer Gleichung $y = 0$ und erhält dadurch $(x-\alpha)^2 = o$, so folgt daraus, daß die Curve die Achse der x in dem Punkt (α, o) berührt.

Von dem Mittelpunkt und den Durchmessern.

§. 112. Der **Mittelpunkt** einer Curve ist ein solcher Punkt C (Fig. 66 und 68), in welchem alle durch denselben gezogenen Sehnen der Curve, wie MM′, in zwei gleiche Theile getheilt werden. Es sei der Ursprung der Coordinaten im Mittelpunkt C. Die zur Achse Cy parallel gelegten Linien MP, M′P geben die gleichen Dreiecke CPM, CP′M′, weil nach der Voraussetzung CM = CM′; mithin CP = CP′; PM = PM′. Liegt folglich der Ursprung

im Mittelpunkt der Curve, so sind die Ordinaten sowohl als Abscissen, je zwei und zwei, gleich und mit entgegengesetzten Zeichen behaftet. Der umgekehrte Satz findet offenbar ebenfalls statt. Der Coordinatenwinkel yCx ist hier ganz beliebig.

Damit also eine Curve ihren Mittelpunkt im Ursprung habe, ist es nothwendig und hinreichend, daß ihre Gleichung ungeändert bleibt, wenn man $-x$ und $-y$ statt x und y setzt.

Wir wollen diese Vorschrift auf die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o \ldots (1)$ anwenden. Soll der Ursprung in dem Mittelpunkt der Curve liegen, so dürfen offenbar in ihrer Gleichung die Glieder $Dy + Ex$ nicht mehr vorkommen; sie wird demnach von der Form $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F = o$ sein. Es ist dies der Grund, warum wir zum Voraus bei der Ellipse und Hyperbel der Mitte der Achse den Namen Mittelpunkt beigelegt, und es ist jetzt erwiesen, daß jede durch diesen Punkt geführte Sehne in demselben halbirt wird.

Es kann sich aber ereignen, daß der Ursprung nicht in dem Mittelpunkt der Curve liege. Um ihn nun hierher zu versetzen, wird man x in $x' + a$ und y in $y' + b$ umändern, und die willkührlichen Coordinaten a und b des neuen Ursprungs dergestalt bestimmen, daß die Glieder der ersten Potenz von x und y verschwinden. Eine solche Rechnung wollen wir jetzt mit der Gleichung (1) vornehmen; wir setzen demnach die gedachten Glieder gleich Null, was uns gibt

$$Bb + 2Ca + E = o,\quad Ba + 2Ab + D = o \ldots (2);$$

daraus folgt $a = \dfrac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}$, $b = \dfrac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}$.

Nach dieser Transformation wird unsere Gleichung (1):

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Q = o,$$

wobei Q das völlig bekannte Glied darstellt. Die Curve vom zweiten Grad hat also allemal einen Mittelpunkt, wenn die in Frage stehende Umwandlung möglich ist, und zwar hat sie nur einen; im entgegengesetzten Fall dagegen besitzt sie keinen, was statt findet, wenn $B^2 - 4AC = o$, mithin a und b unendlich werden. (Siehe niedere Algb. §. 23.) Ist jedoch einer der Zähler von a oder b zu gleicher Zeit $= o$, so wird es auch der andere sein; in diesem Fall gibt es eine unendliche Anzahl von Mittelpunkten und die Gleichungen (2) reduciren sich auf eine. Ueberhaupt drücken, wenn a und b die veränderlichen Coordinaten dar-

stellen, die Gleichungen (2) zwei gerade Linien aus, durch deren Durchschnitt der verlangte Mittelpunkt bestimmt wird. Unsere Geraden laufen zu einander parallel, wenn kein Mittelpunkt vorhanden ist; wenn die Anzahl derselben unendlich groß ist, so fallen jene Geraden in eine zusammen, deren Punkte sämmtlich Mittelpunkte sind. Diese besondern Fälle werden sich bald aufklären. — Die Parabel hat also keinen Mittelpunkt, weil für die Gleichung $y^2 = 2px$ der Ausdruck $B^2 - 4AC$ in $o - 4 \times o = o$ übergeht.

Anmerkung. In der transformirten Gleichung $Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Q = o$ sind A, B, C die ungeänderten Coefficienten der Gleichung (1); dagegen hat Q den Werth: $Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F$.

§. 113. Jede Linie, welche ein System paralleler Sehnen einer Curve halbirt, wird Durchmesser oder Diameter dieser Curve genannt. Zwei Geraden, von denen jede ein Diameter in Bezug auf die andere ist, also jede die Sehnen halbirt, welche mit dem andern Diameter parallel laufen, werden conjugirte oder zugeordnete Diameter, und der Winkel, welchen sie bilden, Conjugationswinkel genannt. Die Achsen der Ellipse und Hyperbel machen z. B. ein System conjugirter Diameter, und zwar insbesondere ein rechtwinkliges.

Wir wollen jetzt die Gleichung irgend eines Diameters für eine Curve vom zweiten Grad suchen. Es sei deshalb $y = ax + b$ die Gleichung einer Geraden. Durch Elimination von y zwischen der letzten Gleichung und der Gleichung (1) erhalten wir eine Gleichung des zweiten Grades, die wir durch $x^2 + kx + l = o$ darstellen wollen. Die Wurzeln dieser Gleichung haben die Form $x = -\frac{1}{2}k + \sqrt{n}$ und sind die Abscissen der Durchschnittspunkte der Geraden mit der Curve. Das Glied $-\frac{1}{2}k$ ist, wie leicht zu sehen, die Abscisse x' des Halbirungspunktes der Sehne. Indem man die angezeigte Rechnung ausführt, findet man die zur Bestimmung von k erforderliche Gleichung nämlich $2x'(Aa^2 + Ba + C) + 2Aab + Bb + Da + E = o$. Läßt man b sich ändern, während a constant bleibt, so erhält man die Abscissen der Halbirungspunkte eines Systems von parallelen Sehnen. Wird aber b eliminirt, indem man $b = y' - ax'$ setzt, so gelangt man zu einer Gleichung zwischen x' und y', welche für alle diese Sehnen paßt: es wird dies demnach

die Gleichung der Linie sein, welche sämmtliche Sehnen halbirt. Die allgemeine Gleichung eines Diameters, in Bezug auf a geordnet, ist folglich: $a(Bx' + 2Ay' + D) + 2Cx' + By' + E = o \ldots (3)$. Hieraus ergeben sich nachstehende Folgerungen:

1) Die Durchmesser der Curven vom zweiten Grad, oder die Linien, welche jedes System parallel gezogener Sehnen halbiren, sind gerade Linien, weil unsere Gleichung vom ersten Grad ist. Für eine gegebene Richtung a der Sehnen läßt sich diese Gleichung leicht construiren.

2) Jeder bestimmten Richtung der Sehnen entspricht ein besonderer Durchmesser.

3) Jeder Durchmesser geht durch den Mittelpunkt, weil die Coordinaten dieses Mittelpunktes (Gl. 2) der Gleichung (3) Genüge leisten.

Für den Fall, in welchem kein Mittelpunkt existirt, was bei der Parabel statt findet, wo $B^2 - 4AC = o$, verwandelt sich unsere Gleichung, wenn C eliminirt wird, in $y' = -\frac{B}{2A}x' - \frac{aD + E}{2Aa + B}$. Da der Coefficient von x' von a unabhängig ist, so sind sämmtliche Diameter der Parabel parallel unter einander, und ihre Richtung ist bekannt. Da ferner die Achse eine von diesen Diametern ist und überdies auf den zugehörigen Sehnen senkrecht steht, so haben wir die Relation $-\frac{Ba}{2A} + 1 = o$; woraus $a = \frac{2A}{B}$. Durch Substitution des eben gefundenen Werthes von a in das letzte Glied der obigen Gleichung ist die absolute Lage der Achse als bekannt zu betrachten, wobei die Coordinaten rechtwinklig sind.

Die nämliche Rechnung mit der allgemeinen Gleichung (3) vorgenommen, gibt, wenn sie den Achsen der Ellipse und der Hyperbel angehören soll, die Bedingungsgleichung $Ba^2 + 2a(C-A) = B$, wodurch a bestimmt ist.

§. 114. Damit die Achse der x ein Diameter der zur Achse der y parallel laufenden Sehne sei, muß jede Abscisse zwei gleiche, mit entgegengesetzten Zeichen behaftete Werthe für y liefern. Lösen wir hiernach die Gleichungen vom zweiten Grade, welche diese Eigenschaft besitzen, in Bezug auf y auf; so müssen wir $y = \pm\sqrt{K}$ finden, wobei x in K enthalten ist. Indem wir die Rechnung mit der Gleichung

(1) vornehmen, sehen wir, daß die in Frage stehende Bedingung nur insofern statt hat, als jene Gleichung der Glieder Bxy und Dy entbehrt. Ebenso muß, wenn die Achse der y ein Diameter in Bezug auf die zur Achse der x parallel geführten Sehnen sein soll, die Gleichung der Curve weder Bxy noch Ex enthalten. Damit also die beiden Achsen der x und y conjugirte Diameter seien, müssen in der Gleichung die Glieder Bxy, Dy und Ex zugleich fehlen, d. h. sie muß die Form haben $Ay^2 + Bx^2 = Q \ldots (4)$. Der Ursprung liegt folglich im Mittelpunkt; die Ellipse und Hyperbel können sonach conjugirte Diameter haben, die Parabel hat aber deren keine. — Alles dies ist von dem Coordinatenwinkel unabhängig. — Hieraus ziehen wir mehrere Folgerungen:

1) Es sei BB' (Fig. 66 und 68) ein Diameter der Ellipse oder Hyperbel. Wir haben gesehen, daß die Tangenten IG und KH in den Punkten B und B' zu einander parallel sind (§§. 93 und 100); überdies sind sie es auch zu dem conjugirten Diameter Cy, weil die ihm parallel laufenden Sehnen durch BB' halbirt werden, und die Endpunkte dieser Sehnen in dem Maße aneinander rücken, wie solche sich dem Punkte B oder B' nähern; die beiden Durchschnittspunkte fallen endlich in B in einen zusammen und die doppelte Ordinate wird Null. Soll folglich die Curve auf ihre conjugirten Diameter bezogen sein, so muß die Achse Cy der Ordinaten der durch die Punkte B oder B' gelegten Tangente, in welchen Punkten nämlich die Achse Cx der Abscissen die Curve trifft, parallel sein.

Anmerkung. Es läßt sich dies auch folgendermaßen zeigen. Die Gleichung eines Diameters für ein System paralleler Sehnen, deren trigonometrische Tangente des Neigungswinkels mit der großen Achse der Ellipse durch β dargestellt wird, ist $y = -\frac{b^2}{a^2\beta}x$. Sind nun x', y' die Coordinaten des Durchschnittspunktes unsers Diameters mit der Curve, so kann dessen Gleichung auch durch $y = \frac{y'}{x'}x$ dargestellt werden. Man hat demnach $\frac{y'}{x'} = -\frac{b^2}{a^2\beta}$, oder $\beta = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}$. Die Gleichung einer von den durch unsere Diameter halbirten parallelen Sehnen ist also $y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'} + g$. Die Gleichung einer Tangente im Punkte (x', y')

ist aber $y - y' = - \frac{b^2}{a^2} \frac{x'}{y'} (x - x')$. Aus der Zusammenstellung der beiden letztern Gleichungen ergibt sich, daß die Tangente am Scheitel irgend eines Diameters parallel ist mit den Ordinaten des Diameters.

2) Jede durch den Mittelpunkt C gezogene Linie CB ist ein Diameter, dessen conjugirter zu der in B geführten Tangente parallel läuft. Es ist dies eine unmittelbare Folge von der Gleichung der *auf* ein solches Achsensystem bezogenen Curve, welche Gleichung nothwendigerweise die in (4) angegebene Form hat. In der Ellipse und Hyperbel gibt es demnach unendlich viele Systeme von conjugirten Diametern.

Anmerkung. Dieser Satz ist einerlei mit folgendem: Wenn von irgend zwei Diametern einer Ellipse die Ordinaten des einen parallel dem andern sind, so werden die Ordinaten des letztern dem erstern parallel sein, oder mit andern Worten, jene Diameter sind conjugirte Diameter. Es seien $y = \beta x$ und $y = \beta' x$ irgend zwei Diameter BB′, DD′; dann sind die Gleichungen ihrer Ordinaten bezüglich zu dem ersten und dem zweiten $y = - \frac{b^2}{a^2 \beta} x + g$ und $y = - \frac{b^2}{a^2 \beta'} + g'$. Ist nun die zweite Ordinate ON parallel zu dem ersten Diameter BB′, so muß $\beta = - \frac{b^2}{a^2 \beta'}$, oder $\beta' = - \frac{b^2}{a^2 \beta}$ sein; dadurch wird die Gleichung für die erste Ordinate in $y = \beta' x + g$ übergehen, d. h. diese Ordinate ist zu dem zweiten Diameter parallel. Für zwei conjugirte Diameter $y = \beta x$ und $y = \beta' x$ hat man also die Relation $\beta \beta' = - \frac{b^2}{a^2}$; woraus hervorgeht, daß die Anzahl von Paaren conjugirter Diameter unbegrenzt ist.

3) Wenn AO (Fig. 62 und 63) die erste Achse einer Ellipse oder Hyperbel ist, so gibt es immer zwei Supplementarsehnen ON, AN, welche zu einem Paar conjugirter Diameter beziehungsweise parallel sind. Denn die zwischen den Winkeln, welche diese Sehnen mit der Abscissenachse bilden, gefundene Relation $a^2 \alpha \alpha' \pm b^2 = o$ (§§. 94 und 100) gilt auch für dergleichen Diameter. Sie behalten einerlei Richtung

in allen Ellipsen oder Hyperbeln bei, deren Achsen a und b in dem nämlichen Verhältniß stehen.

Anmerkung. Hieraus ergibt sich ein einfaches Verfahren, zu einem gegebenen Diameter MM′ der Ellipse den conjugirten zu finden. Man zieht nämlich zu dem gegebenen Diameter die Sehne AN (Fig. 62) parallel, darauf die Supplementsehne NO, und mit dieser letztern parallel den Diameter BB′; so ist solcher der Conjugirte zu MM′.

4) Die Aufgabe, zwei conjugirte Diameter zu ziehen, welche einen gegebenen Winkel ϑ einschließen, ist in Bezug auf die Supplementarsehnen gelöst worden; ϑ hat eine Grenze. Dieser Winkel kann nur für die Achsen ein rechter sein. In dem Kreise sind alle conjugirten Diameter rechtwinklig zu einander. Die vorliegende Aufgabe kommt darauf zurück, ein Dreieck ONA zu construiren, dessen Basis AO und der gegenüberliegende Winkel $N = \vartheta$ bekannt ist. Man beschreibt hiernach über AO einen Kreisabschnitt, der den gegebenen Winkel ϑ faßt; die beiden Durchschnittspunkte des Kreises mit der Curve bestimmen die Lage des Scheitels N.

Anmerkung. Man bewerkstelligt bei der Ellipse die eben angeführte Construction über der großen Achse, wenn der gegebene Winkel ϑ stumpf, dagegen über der kleinen Achse, wenn dieser Winkel spitz ist. Liegt der Winkel ϑ ausserhalb der dem Conjugationswinkel bestimmten Grenzen, so wird die Aufgabe unmöglich, was man daran erkennt, daß die Ellipse nicht mehr von dem den gegebenen Winkel enthaltenden Kreisbogen geschnitten wird.

5) Man wird leicht finden, daß die Tangenten den Punkten D und D′ (Fig. 66), wo der zu BB′ conjugirte Diameter Cy die Ellipse schneidet, dem ersten Diameter BB′ parallel sind. Das Parallelogramm GIKH heißt der Ellipse umschrieben.

6) Die zwischen den trigonometrischen Tangenten der Winkel (Fig. 68) der conjugirten Diameter der Hyperbel mit der ersten Achse bestehende Relation $\beta\beta' = \frac{b^2}{a^2}$ zeigt, daß, wenn $\beta < \frac{b}{a}$, $\beta' > \frac{b}{a}$ sein müsse, woraus folgt, daß der zweite conjugirte Diameter die Curve nicht treffen könne. Dies gilt für jedes System conjugirter Diameter

der Hyperbel, dergestalt, daß wenn der erste Diameter reell ist, der conjugirte imaginär wird.

§. 115. Es seien Cx und Cy (Fig. 66) zwei conjugirte Diameter einer Ellipse; BB′ und DD′ sind die Längen derselben. Man setze $CB = a'$ und $CD = b'$. Aus $y = o$ ergibt sich $x = a'$; aus $x = o$ desgleichen $y = b'$. Werden diese Bedingungen in die Gleichung (4) eingeführt, so hat man $Ba'^2 = Q$, $Ab'^2 = Q$; hieraus $B = \frac{Q}{a'^2}$ $A = \frac{Q}{b'^2}$. Dadurch erhält die Gleichung der Ellipse, auf zwei conjugirte Diameter bezogen, die Form: $a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2 \ldots\ldots (5)$.

§. 116. Es seien ebenso Cx und Cy (Fig. 68) irgend zwei conjugirte Diameter einer Hyperbel. $CB = a'$ gibt $B'a^2 = Q$; denn für $y = o$ ist $x = a'$. Da die Achse Cy die Curve nicht schneidet, so würde, wenn man ihre Gleichung in Bezug auf die conjugirten Diameter Cx, Cy kennte, und den Durchschnittspunkt der Achse Cy mit der Curve bestimmen wollte, für $x = o$ sich ein imaginärer Werth für y herausstellen. Wir ändern aber aus ähnlichen Gründen wie im §. 75 das Zeichen unter den Wurzelzeichen, wodurch jener Werth reell wird. Stellen wir denselben durch b′ dar, so würde für $x = o$ entstehen $y^2 = -b'^2$, woraus $-Ab'^2 = Q$. Die halbe Länge des zweiten Diameters oder b′ ist hier die dem Mittelpunkt entsprechende schiefe, jedoch reell gemachte Ordinate.

Die Gleichungen $Ba'^2 = Q$, $-Ab'^2 = Q$ geben

$$B = \frac{Q}{a'^2}, \quad A = -\frac{Q}{b'^2}.$$

Hierdurch erhält die Gleichung (4) der Hyperbel, wenn sie auf zwei conjugirte Diameter bezogen wird, die Form: $a'^2 y^2 - b'^2 x^2 = -a'^2 b'^2 \ldots (6)$.

Nimmt man $CD = CD' = b'$, so bilden die zur Achse Cx parallel gezogenen Geraden GH, IK das der Hyperbel eingeschriebene Parallelogramm GIKH. Die Gleichungen (5) und (6) können dadurch von einander abgeleitet werden, daß man $b'\sqrt{-1}$ statt b′ setzt. Dasselbe gilt für die Resultate der Rechnungen, wodurch man der Mühe überhoben ist, solche für die Hyperbel zu wiederholen.

§. 117. Aendert man x in y und y in x um, so behält die Gleichung der Ellipse die nämliche Form. Alle auf den einen Diameter Bezug habenden Constructionen gelten folglich auch für die

andern Diameter. Die Gleichung der Hyperbel geht $b'^2 y'^2 - a'^2 x^2 = a'^2 b'^2$ über, wenn man die x auf dem zweiten Diameter derselben zählt.

§. 118. Da die Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel, wenn sie auf die Achsen und conjugirten Diameter bezogen werden, von derselben Form sind; so ist es unnöthig, die für die Achsen schon ausgeführten Rechnungen hier nochmals zu wiederholen. Nachstehende Folgerungen lassen sich hiernach leicht ableiten:

1) Die Quadrate der Ordinaten PM (Fig. 66 und Fig. 68) verhalten sich wie die Produkte der Abschnitte PB, PB', in welche die erste Achse BB' durch die Ordinaten getheilt wird.

2) Zwei Ellipsen, bei deren einer 2a' und 2b' die Achsen, bei der andern dieselbe Größen zwei conjugirte Diameter sind, haben einerlei Gleichung. Für jede Abscisse sind also in beiden die Ordinaten von gleicher Länge, mit dem Unterschiede, daß sie verschiedene Neigung gegen die x haben. Um also eine Ellipse zu construiren, von der man zwei conjugirte Diameter CB, CD (Fig. 67) der Richtung und der Lage nach kennt, nimmt man auf der zu BB' errichteten Senkrechten KK' die Linien CK und CK' = CD, verzeichnet dann mittelst der Eigenschaft der Brennpunkte, oder auf anderm Wege, über den Achsen BB' und KK' die Ellipse BKB'K'; man bringt endlich jede Ordinate PN in die zu CD parallele Lage PM. Für $a' = b'$, d. h. für zwei einander gleiche conjugirte Durchmesser, geht die Hülfsellipse in einen Kreis über. Eine ähnliche Construction findet bei der Hyperbel statt.

3) Für die Richtung der Berührungslinie an einem beliebigen Punkt (x', y') und die Gleichung dieser Linie selbst hat man

bei der Ellipse, $A = -\frac{b'^2 x'}{a'^2 y'}$, $a'^2 yy' + b'^2 xx' = a'^2 b'^2$;

bei der Hyperbel, $A = \frac{b'^2 x'}{a'^2 y'}$, $a'^2 yy' - b'^2 xx' = -a'^2 b'^2$.

Dabei bezeichnet A aber nicht mehr die trigonometrische Tangente des Winkels der Berührungslinie mit der Abscissenachse, sondern das Verhältniß der Sinus der Winkel der Berührungslinie mit den beiden conjugirten Diametern.

4) Die nämliche Verschiedenheit beibehalten, sieht man, daß die im §. 94 für die Supplementarsehnen ausgeführte Rechnung auch hier anwendbar ist, und daß das daraus hergeleitete Verfahren, eine Tan-

gente an die Ellipse, gleichfalls hier noch statt findet. Man zieht nämlich an den gegebenen Punkt M (Fig. 69) die Gerade CM, mit dieser parallel die Sehne B′N, dann die Supplementarsehne NB, und endlich mit dieser durch den gegebenen Punkt M die Gerade TM parallel. — Es ist ferner leicht, wenn die Ellipse und der Berührungspunkt gegeben sind, die Tangente zu ziehen. Denn führt man zwei beliebige, parallele Sehnen, halbirt dann die ihre Mitten verbindende Gerade BB′, so erhält man zuvörderst den Mittelpunkt C, worauf zu unserer vorigen Construction geschritten wird.

5) Von einem ausserhalb der Ellipse auf der gegebenen Geraden BB′ liegenden Punkt K (Fig. 103) ziehen wir die Tangentenpaare KM, KN an die Ellipse, dann den Diameter DD′ parallel zu BB′ und seinen Conjugirten CA. Der im §. 99 gemachte Calcul kann nun hier wiederholt werden. Die Gleichung der Sehne MN, welche die Berührungspunkte verbindet, ist also $a'^2\beta y' + b'^2\alpha x' = a'^2 b'^2$, mit Hülfe deren diese Sehne construirt werden kann, was die Berührungspunkte und die Tangenten gibt. Läßt man den Punkt K auf der Linie BB′ sich bewegen, so werden die Sehne und die Tangentenpaare geändert, der Punkt E bleibt aber unverrückt. Die Abscisse des Durchschnittspunkts E der Linie MN mit der Achse der x ist $x' = \frac{a'^2}{\alpha}$, d. h. von b′ und β unabhängig.

6) Die im §. 97 bewiesene Eigenschaft besteht ebenfalls, wenn die Ellipse auf conjugirte Diameter bezogen wird. Wenn also CO (a′) und Cy (b′) (Fig. 61) zwei, was auch immer für welche, conjugirte Diameter sind, und die Tangente in M trifft die an den Scheiteln des erstern gezogenen Tangenten in H und K, so hat man stets $OH \cdot AK = Cy^2 = b'^2$.

Alle diese Betrachtungen finden auch bei der Hyperbel statt.

§. 119. Wir wollen jetzt die Relationen aufsuchen, welche zwischen den halben Achsen a, b und den halben conjugirten Diametern a′, b′ statt finden. Wir nehmen zu diesem Behuf die Achsengleichung und die auf ein System conjugirter Diameter bezogene Gleichung der Curve wieder vor, und führen die eine derselben auf die andere mittelst einer Transformation der Coordinaten zurück. Wir machen mit der Ellipse den Anfang. Die Curve sei auf die rechtwinkligen Achsen CA, CM (Fig. 66) bezogen; es handelt sich darum, die rechtwinkligen Coordinaten x und y in schiefwinklige x′ und y′, welche auf den con-

jugirten Diametern gezählt werden, umzuändern. Wir substituiren deshalb in die Gleichung $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ die Werthe $x=x'\cos\alpha+y'\cos\beta$, $y=x'\sin\alpha+y'\sin\beta$, wo α und β die Winkel sind, welche die neuen Achsen CB und CD der x' und y' mit der Achse der x machen. Man findet $(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)x'^2+(a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta)y'^2+2(a^2\sin\alpha\sin\beta+b^2\cos\alpha\cos\beta)x'y'=a^2b^2$. Will man aber, daß die neuen Achsen conjugirte Diameter werden, d. h., daß die transformirte Gleichung die Form $a'^2y'^2+b'^2x'^2=a'^2b'^2$ erhalte; so muß das Glied in $x'y'$ verschwinden, woraus die Bedingungsgleichung: $a^2\sin\alpha\sin\beta+b^2\cos\alpha\cos\beta=0$, oder, wenn man durch $\cos\alpha\cos\beta$ dividirt: $a^2\tan\alpha\tan\beta+b^2=0$ ... (1). Unsere Bedingungsgleichung ist genau dieselbe, die wir für die Supplementarsehnen (§. 94) gefunden haben, und stimmt völlig mit dem überein, was in §. 114 über die Richtung dieser Sehnen, Tangenten und conjugirten Diametern gesagt worden.

Setzt man successive y' und x' Null, um die Längen a', b' der Diameter zu finden, so kommt:

$$(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)a'^2=a^2b^2 \;...\; (2),$$

$$(a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta)b'^2=a^2b^2 \;...\; (3).$$

Um α und β aus diesen drei Gleichungen zu eliminiren, sucht man die Werthe von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ aus der Gleichung (2), indem man die Gleichung $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ zu Hülfe nimmt; man hat

$$a'^2(a^2-b^2)\sin^2\alpha=b^2(a^2-a'^2),$$

$$a'^2(a^2-b^2)\cos^2\alpha=a^2(a'^2-b^2).$$

Die Gleichung (3) gibt ebenso (indem man a' in b' und α in β umändert),

$$b'^2(a^2-b^2)\sin^2\beta=b^2(a^2-b'^2),$$

$$b'^2(a^2-b^2)\cos^2\beta=a^2(b'^2-b^2).$$

Indem man das zweite Glied der Gleichung (1) versetzt und aufs Quadrat erhebt, hat man $a^4\sin^2\alpha\sin^2\beta=b^4\cos^2\alpha\cos^2\beta$. Werden für $\sin^2$ und $\cos^2$ die ebengefundenen Werthe substituirt, so findet man mit Hinweglassung der gemeinschaftlichen Factoren, $(a^2-a'^2)(a^2-b'^2)=(a'^2-b^2)(b'^2-b^2)$, oder $a^4-b^4=a^2(a'^2+b'^2)-b^2(a'^2+b'^2)$, oder endlich $a^2+b^2=a'^2+b'^2$ ... (4), weil die ganze Gleichung durch a^2-b^2 theilbar ist.

In der Ellipse ist also die Summe der Quadrate zweier conjugirten Diameter constant und gleich der Summe der Quadrate der beiden Achsen.

Werden die Gleichungen (2) und (3) miteinander multiplicirt, so findet man

$a^4b^4 = a'^2b'^2[(a^4\sin^2\alpha\sin^2\beta + b^4\cos^2\alpha\cos^2\beta) + a^2b^2(\sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\alpha)]$.

Zieht man von dem in den Klammern eingeschlossenen Ausdruck das Quadrat der Gleichung (1) ab, und dividirt das Ganze durch a^2b^2; so kommt

$$a^2b^2 = a'^2b'^2(\sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta).$$

Der letzte Factor ist aber das Quadrat von $\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta$, oder von $\sin(\beta - \alpha)$; folglich $a'b'\sin(\beta-\alpha) = a'b'\sin\vartheta = ab \ldots (5)$, weil $\beta - \alpha = \vartheta =$ dem Winkel DCB, den die conjugirten Diameter mit einander machen. Da $a'b'\sin\vartheta$ die Fläche des Parallelogramms CDBK (Fig. 66) bezeichnet, so sieht man, daß **jedes um die Ellipse beschriebene Parallelogramm GK eine beständige Größe und dem Rechtecke aus den beiden Achsen gleich ist**, welches auch die Lage der zwei conjugirten Diameter sein mag. — Wird a und b mit Hülfe der Gleichungen (4) und (5) eliminirt, so findet man, daß die Gleichung (1) in

$$o = a'^2\sin\alpha\cos\alpha + b'^2\sin\beta\cos\beta, \text{ oder } o = a'^2\sin 2\alpha + b'^2\sin 2\beta \ldots (6)$$

übergeht. — Für die gleichen conjugirten Diameter haben wir $a' = b'$. Die Gleichung (6) gibt hier $\sin 2\alpha = -\sin 2\beta$; diese Diameter bilden also beiderseits der kleinen Achse gleiche Winkel mit der großen Achse. Die Gleichung (1) wird im vorliegenden Falle, $-a^2\tang^2\alpha + b^2 = o$, woraus $\tang\alpha = \pm\frac{b}{a} = \frac{BC}{AC}$ (Fig. 62). Die Ellipse hat also zwei gleiche conjugirte Diameter, welche mit den aus den Endpunkten der großen und kleinen Achse gezogenen Supplementarsehnen parallel laufen. Es sind dies die Diameter, die den größten stumpfen Winkel bilden. Es sei CM einer dieser Diameter (Fig. 70); das Dreieck CPM gibt aber $x^2 + y^2 = a'^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ (Gleichung 4). Hieraus entsteht, wenn y^2 mittelst der Gleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ eliminirt wird, $x^2 = \frac{1}{2}a^2$, ein von b unabhängiges Resultat. Die Endpunkte der gleichen conjugirten Diameter sämmtlicher über derselben großen Achse 2a beschriebenen Ellipsen haben also einerlei Abscisse $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

§. 120. Die Gleichung, welche die Lage der unter einem gewissen Winkel ϑ gegen einander geneigten conjugirten Diameter bestimmt, haben wir in §. 94 aufgestellt; sie ist

$$a^2\tang^2\alpha - (a^2 - b^2)\tang\alpha\,\tang\vartheta + b^2 = 0 \ldots (7).$$

Die fünf Gleichungen 1, 4, 5, 6, 7, welche eigentlich nur vier verschiedene ausmachen, dienen dazu, von den sieben Größen a, b, a′, b′, α, α' und ϑ vier zu bestimmen, wenn die drei andern gegeben sind. — In der Aufgabe z. B., wo verlangt wird (§. 114) die Achsen der Ellipse zu finden, wenn ein Paar conjugirter Diameter der Größe und Lage nach gegeben sind, kennt man a′, b′ und ϑ. Wir multipliciren die Gleichung (5) mit ± 2 und addiren; es entsteht dadurch $(a \pm b)^2 = a'^2 \pm 2a'b' \sin\vartheta + b'^2$. Diese Gleichung zeigt, daß $a+b$ und $a-b$ Seiten in zwei Dreiecken ausdrücken, deren entgegengesetzter Winkel in dem einen $90^0 + \vartheta$, in dem andern $90^0 - \vartheta$ ist, und a′, b′ die beiden andern Seiten sind.

Anmerkung. Die Werthe von a und b sind stets reell, weil immer $a'^2 + b'^2 > 2a'b' \sin\vartheta$ ist. — Um die Richtung der großen Achse, d. h. den Winkel α zu finden, hat man die Gleichung $a'^2 \sin 2\alpha + b'^2 \sin 2(\vartheta + \alpha) = 0$.

§. 121. Für die Hyperbel wird gefunden, wenn man b und b′ in $b\sqrt{-1}$ und $b'\sqrt{-1}$ umändert; $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$, $a'b' \sin\vartheta = ab$, $a^2 \tang\alpha \tang\beta = b^2$, oder $a'^2 \sin 2\alpha = b'^2 \sin 2\beta$, $a^2 \tang^2\alpha - (a^2+b^2) \mathrm{tg}\,\alpha\, \mathrm{tg}\,\vartheta = b^2$, welche Gleichungen dieselben Anwendungen wie jene bei der Ellipse gestatten.

In der Hyperbel ist also die Differenz der Quadrate zweier conjugirten Diameter der Differenz der Quadrate der beiden Achsen gleich. Ferner ist jedes in der Hyperbel eingeschriebene Parallelogramm der Fläche nach constant und dem Rechteck aus den beiden Achsen gleich.

Für $a' = b'$ ist $a = b$ und umgekehrt: Die gleichseitige Hyperbel hat also blos gleiche conjugirte Diameter, und zwar sind in derselben alle Systeme conjugirter Diameter von solcher Beschaffenheit. Ausserdem ist hier noch $\tang\alpha \tang\beta = 1$. Es seien jetzt CA (Fig. 65) die erste Achse, CM und Cy′ zwei gleiche conjugirte Diameter. Man hat $\tang MCA = \cot \cdot y'CA = \tang y'Cy$, oder $y'Cy = x'Cx$. Die Asymptote SC macht aber mit der Achse CA einen Winkel von 45^0, folglich $SCM = SCy'$: in der gleichseitigen Hyperbel halbirt also die Asymptote die Winkel sämmtlicher conjugirter Diameter.

§. 122. Nach dem im §. 106 Gesagten sind die Dreiecke QSM, CMP (Fig. 65) gleich groß, ferner Fläche CPMQ = CMS = $\frac{1}{2}ab$

Nun ist aber $CMS = \frac{1}{2}SM \cdot CM \sin \vartheta$, wo ϑ den Winkel CMS der conjugirten Diameter bezeichnet; also $ab = a' \times SM \sin\vartheta = a'b' \sin \vartheta$ (§. 121); hieraus folgt $SM = b'$. Für jeden beliebigen Diameter CM wird also der conjugirte der Lage und Größe nach durch die Linie ST bestimmt. Die Diagonalen HI und GK (Fig. 68) des der Hyperbel eingeschriebenen Parallelogramms sind die Asymptoten.

Aus der Gleichung der Hyperbel $a'^2y^2 - b'^2x^2 = - a'^2b'^2$ erhält man, bei ähnlicher Rechnung wie die im §. 102, für die Gleichung der Asymptoten: $y = \pm \frac{b'}{a'} x$, auf die conjugirten Diameter als Coordinatenachsen bezogen. Setzt man nun hier $x = a' = CM$ (Fig. 65), so kommt $y = b' = MS = MT$; M ist also die Mitte von ST, und die Asymptoten sind durch die Endpunkte S, T des conjugirten Diameters bestimmt, was mit dem vorhin und in §. 106 Gesagten übereinstimmt.

Für jede Abscisse gibt es zwei gleiche, entgegengesetzte Ordinaten, wenn Cy' parallel zur Tangente ST läuft; Cx' schneidet also bb' und NN' in zwei gleiche Theile, woraus $bN = b'N'$. Da man übrigens jedes conjugirte Diametersystem zu Coordinaten wählen kann, wodurch der zweite Durchmesser Cy' nach und nach alle möglichen Lagen bekommt; so gilt die eben gedachte Eigenschaft für jede Sehne der Hyperbel.

§. 123. Wir transformiren jetzt die Achsengleichung der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ auf ein anderes beliebiges, gleichfalls rechtwinkliges Coordinatensystem, indem wir setzen

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

Man erhält auf diese Weise:

$$a^2x'^2 \sin^2\alpha + 2a^2 x'y' \sin \alpha \cos \alpha + a^2y'^2 \cos^2 \alpha$$
$$+ b^2 x'^2 \cos^2 \alpha - 2b^2x'y' \sin \alpha \cos \alpha + b^2 y'^2 \sin^2 \alpha = a^2 b^2,$$

wobei α den Winkel der x' mit den x bezeichnet.

Um die Durchschnittspunkte der neuen Achsen mit der Curve zu finden, setzen wir successive $x' = o$ und $y' = o$; hieraus folgt

$$A^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}, \quad B^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha},$$

wenn A und B die Abstände des Mittelpunktes von den Durchschnittspunkten der rechtwinkligen Achsen x' und y' mit der Curve sind. Aus diesen beiden Ausdrücken ergibt sich:

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Dieser von α unabhängige Ausdruck beweist, daß, wenn man durch den Mittelpunkt einer Ellipse zwei beliebige auf einander senkrechte Linien zieht, die auf diesen Linien gezählten Entfernungen A und B des Mittelpunkts von der Curve von solcher Beschaffenheit sind, daß die Größe $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ constant ist.

Dieselbe Rechnung für die Hyperbel ausgeführt beweist, daß $\frac{1}{A_2} + \frac{1}{B^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$. Um eine geometrische Bedeutung für B zu erhalten, muß man sich eine zweite Hyperbel denken, deren erste Achse 2b und zweite Achse 2a mit der zweiten und ersten Achse der ersten Hyperbel zusammenfallen, und zwischen den Asymptoten der letztern liegt, wie es Fig. 76 zeigt.

Anmerkung. Man sieht leicht, daß diese beiden mit einander verbundenen oder conjugirten Hyperbeln die nämlichen Asymptoten haben; ferner, daß jeder Diameter der erstern Hyperbel auch ein Diameter der zweiten ist, in der Art, daß die letztern von den imaginären Durchmessern der erstern geschnitten, dagegen von den reellen Durchmessern derselben nicht geschnitten werden.

§. 124. Da die Parabel eigentlich keine conjugirten Diameter besitzt, so wollen wir sie auf ihre einfachen Diameter beziehen. Um den Ursprung A in einen beliebigen Punkt (a, b) zu verlegen, und ausserdem die Richtung der Coordinaten zu ändern, müssen wir in der Gleichung $y^2 = 2px$ setzen $x = a + x' \cos\alpha + y \cos\beta$, $y = b + x' \sin\alpha + y' \sin\beta$. Durch diese Substitution erhält man:

$$b^2 - 2pa + 2x' (b \sin\alpha - p \cos\alpha) + 2y' (b \sin\beta - p \cos\beta)$$
$$+ 2 \sin\alpha \sin\beta\, x'y' + \sin^2\alpha \cdot x'^2 + \sin^2\beta \cdot y'^2 = o.$$

Damit die Achse der x' Diameter in Bezug auf die der y' sei, müssen die Glieder $\sin\alpha \sin\beta \cdot x'y'$ und $2y' (b \sin\beta - p\cos\beta)$ verschwinden; folglich $\sin\alpha \sin\beta = o$, $b \sin\beta - p \cos\beta = o$. Die erstere gibt $\sin\alpha = o$, $\cos\alpha = 1$; die zweite reducirt sich auf $b \tang\beta = p$, wo β den Winkel der x und y' darstellt, sie bestimmt diesen Winkel oder die Richtung der Achse y': a und b sind willkührlich. Alle Durchmesser laufen also mit der Achse der Parabel parallel. Die transformirte

Gleichung ist jetzt: $\sin^2\beta \cdot y'^2 - 2px' + b^2 - 2pa = o$. Aus der im §. 113 gegebenen Erklärung folgt aber, daß, wenn eine Linie Diameter in Bezug auf eine andere ist, jede zu dieser letztern parallel gezogene Gerade als Coordinatenachse gewählt werden kann. Wir verlegen daher den Ursprung in den Punkt M, wo die Achsen der x' die Curven schneidet; hierdurch wird $b^2 - 2pa = o$. Es entsteht endlich $y'^2 = \frac{2px'}{\sin^2\beta} = 2p'x'$, wenn man $\frac{p}{\sin^2\beta} = p'$ setzt. Da der Ausdruck $\tang\beta = \frac{p}{b}$ mit dem Ausdruck $A = \frac{p}{y'}$ (§. 89) übereinstimmt, so folgt, daß die Tangente MT (Fig. 57) im Ursprung M die neue Ordinatenachse y' ist. $2p'$ wird der Parameter des zugehörigen Diameters genannt. Wenn irgend ein Diameter und die Tangente in seinem Scheitel als Achsen der Coordinaten angenommen werden, so heißen sie conjugirte Achsen.

Aus der Gleichung $\tang\beta = \frac{p}{b}$ folgt $\sin\beta = \frac{p}{\sqrt{p^2+b^2}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{(p+2a)}}$, und daraus $2p' = \frac{2p}{\sin^2\beta} = 2(p+2a) = 4MF$.

Der Parameter eines beliebigen Diameters ist also gleich der vierfachen Entfernung seines Scheitels vom Brennpunkt.

Aus der Zusammenstellung der Gleichungen

$$b \tang\beta = p,\ p' = p + 2a,\ b^2 = 2pa$$

sieht man, daß man, wenn von den Größen p, p', a, b und β zwei bekannt sind (die analytischen Ausnahmen abgerechnet), die drei übrigen finden und die Curve construiren kann, deren Gleichung, bezogen auf einen beliebigen Diameter, ist $y'^2 = 2p'x'$.

§. 125. Da die Achsengleichung der Parabel und ihre Gleichung auf ein System conjugirter Achsen von einerlei Form sind, so ergeben sich daraus folgende Resultate:

1) Die für die Ellipse gegebene Construction (§. 118) ist auch für die Parabel anwendbar, wenn man die conjugirten Achsen und den Parameter kennt.

2) Die Gleichung der Tangente für einen beliebigen Punkt (x', y') ist $yy' = p'(x + x')$. Für den Fall der conjugirten Achsen ist $\frac{p}{y'}$ das Verhältniß der Sinus der Winkel, welche die Tangente mit den

Achsen der x und y bildet. — Soll durch einen ausserhalb der Parabel liegenden Punkt eine Tangente gezogen werden, so finden die im §. 92 gegebenen Constructionen und Eigenschaften gleichfalls statt.

3) Die Subtangente ist noch der doppelten Abscisse gleich. Man wird also leicht an einem gegebenen Punkt an die Parabel eine Tangente ziehen, wenn man einen Diameter kennt.

4) Für eine gegebene Parabel MAM′ (Fig. 57) kann man einen Diameter, die Achse, den Scheitel, die Tangente bestimmen. Denn zieht man in der Curve willkührlich zwei Sehnen miteinander parallel, vereinigt dann die Halbirungspunkte gedachter Sehnen durch eine Gerade, so ist dieser letztere ein Durchmesser MS. Zieht man jetzt auf den Durchmesser MS die Sehne MM′ senkrecht, halbirt diese in P und führt durch den Punkt P die Linie AN parallel mit MS; so erhält man sofort den Scheitel.

5) Um den Brennpunkt zu finden, construire man die Achse Ax wie oben, verlängere dieselbe um das Stück $AT = AP$, ziehe die TM, welche eine Tangente im Punkt M sein wird. Errichtet man jetzt die Normale MN, so ist $PN = p$; macht man daher $AF = \frac{PN}{2} = \frac{p}{2}$, so ist F der gesuchte Brennpunkt.

6) Aus der Gleichung $2p' = \frac{y'^2}{x'}$ folgt, daß der Parameter eine dritte Proportionale zwischen der Abscisse und ihrer Ordinate ist. Es läßt sich also leicht eine Parabel beschreiben, wenn man die Lage eines Systems conjugirter Achsen und einen Punkt der Curve kennt. Die Coordinaten x' und y' dieses Punktes bestimmen den Parameter $2p'$, wodurch man auf das, was wir schon gesehen, zurückgeführt wird.

Anmerkung. Man soll in einer gegebenen Parabel ein System conjugirter Achsen construiren, welches einen gegebenen Winkel einschließt. Nachdem die Achse bestimmt worden, ziehe man aus irgend einem Punkt derselben die Sehne unter dem gegebenen Neigungswinkel gegen die Achse, halbire dann diese Sehne und führe durch den Halbirungspunkt eine Parallele mit der Achse, und endlich durch den Punkt, wo die Parallele die Curve trifft, eine Gerade parallel mit der gewählten Sehne; diese zweite und die erst genannte Parallele bilden das verlangte System conjugirter Achsen der Parabel.

Diskussion der Gleichungen des zweiten Grades.

§. 126. Es sei jetzt unsere Aufgabe, die Curven zu construiren, welche der Gleichung $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o$.....(a) entsprechen, in welcher die Coefficienten A, B.... der Größe und den Zeichen nach gegeben sind. Wir nehmen die Coordinaten rechtwinklig an, weil man, ohne den Grad der Gleichung zu ändern, sie stets in eine solche Lage bringen kann. Da die Curven hinsichtlich ihrer Form und Eigenschaften sehr verschieden sind, je nachdem sie einen Mittelpunkt oder keinen haben; so unterscheiden wir drei Fälle, in denen $B^2 - 4AC$ Null, negativ oder positiv ist. Der Kürze halber setzen wir in der Folge $B^2 - 4AC = m$.

Erster Fall: $B^2 - 4AC = m = o$.

§. 127. Die in Frage stehende Curve MDM′ (Fig. 71) hat keinen Mittelpunkt; Ax und Ay sind die Achsen. Wir wollen unsere Curve auf andere, ebenfalls rechtwinklige Achsen Ax′, Ay′ beziehen, und untersuchen, ob wir die letztern Achsen dergestalt wählen können, daß die Gleichung die Form $ay'^2 + dy' + ex' + F = o$... (b) erhalte. Die nämliche Curve MDM′ hätte demnach die verschiedenen Achsensysteme (a) und (b) zu Gleichungen, insofern man durch eine Transformation der Coordinaten die eine derselben identisch mit der andern machen könnte. Den Winkel xAx′ der Achsen durch ϑ darstellend, wollen wir nun von den letztern Coordinaten zu den andern mittelst der bekannten Transformationsformeln übergehen, d. h. von dem System y′Ax′ zu dem System yAx, wobei wir den Winkel ϑ der beiden Achsen x und x′ negativ nehmen, weil die Achse der x der transformirten Gleichung (a) unterhalb der Achse der x′ der Gleichung (b) liegt, welche wir für einen Augenblick als gegeben betrachten. Wir setzen also in der Gleichung (b)

$$y' = y \cos\vartheta - x \sin\vartheta,\quad x' = y \sin\vartheta + x \cos\vartheta \ldots\ldots (c).$$

Da das Resultat dieser Substitution mit (a) identisch sein soll und die constante Zahl F beiderseits die nämliche ist, so müssen die Coefficienten beziehungsweise gleich sein. Vergleichen wir hiernach das erhaltene Resultat, Glied für Glied, mit (a), so werden wir haben: $a \cos^2\vartheta = A$, $a \sin^2\vartheta = C \ldots (1)$ — $2a \sin\vartheta \cos\vartheta = B \ldots (2)$, $d \cos\vartheta + e \sin\vartheta = D$, $e \cos\vartheta - d \sin\vartheta = E \ldots (3)$. Wir finden also fünf Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten a, e, d, ϑ.

Wegen der Bedingungsgleichung $B^2 = 4AC$ fällt aber die Relation (2) mit den Relationen (1) zusammen, woraus folgt, daß diese drei Gleichungen nur so viel als zwei gelten, geeignet a und ϑ zu bestimmen, und daß die obige Rechnung nur für den Fall paßt, wo $m = o$. Durch Addition der beiden Relationen (1) entsteht $a = A + C$; woraus $\sin\vartheta = \sqrt{\frac{C}{a}}$, $\cos\vartheta = \sqrt{\frac{A}{a}}$, $\tang\vartheta = \sqrt{\frac{C}{A}}$, $\sin 2\vartheta = -\frac{B}{a}$. Durch Elimination von d und e mittelst der Gleichungen (3) hat man $d = D\cos\vartheta - E\sin\vartheta$, $e = D\sin\vartheta + E\cos\vartheta$..... (4), oder

$$d = \frac{D\sqrt{A} - E\sqrt{C}}{\sqrt{a}},\quad e = \frac{D\sqrt{C} + E\sqrt{A}}{\sqrt{a}} \ldots (5).$$

Die Bedingung $B^2 = 4AC$ gestattet die drei ersten Glieder der Gleichung (a) durch das Quadrat eines Binoms oder $(ky + lx)^2$ darzustellen. (Niedere Algebra §. 48.) A und C bezeichnen alsdann positive Quadrate, deren reelle Wurzeln k und l sind. Das Unendliche oder Imaginäre kann folglich in obigen Resultaten niemals zum Vorschein kommen; woraus hervorgeht, daß für den Fall von $m = o$, man immer vermittelst einer Transformation der Coordinaten die vorgelegte Gleichung (a) auf die Form (b) zu bringen im Stande ist. — Wäre A oder C Null, so würde es auch B sein, weil $B^2 = 4AC$; die vorgelegte Gleichung hätte dann schon die Form (b), was eine weitere Achsenänderung unnöthig macht. Wären A und C zugleich Null, so würden in der Gleichung (a) die drei ersten Glieder fehlen, was sie auf den ersten Grad bringt.

In jeder gegebenen Gleichung, für welche $m = o$, macht man folglich die oben angezeigte Rechnung, oder vielmehr man setzt auf der Stelle die transformirte (b) an, nachdem man vorerst die Coefficienten vermittelst unserer Hülfsgleichungen gefunden, und die neue Achse Ax' (Fig. 71) dem Werthe von ϑ gemäß construirt hat, nämlich $\tang\vartheta = \sqrt{\frac{C}{A}}$, $\sin 2\vartheta = -\frac{B}{A+C}$. Das Zeichen von $\sin 2\vartheta$ ist dem von B entgegengesetzt, was uns lehrt, daß, wenn der Winkel $2\vartheta > 180^0$, d. h. wenn ϑ oder $x'Ax >$ als ein Quadrant ist, die Achse Ax' unterhalb Ax liegt. Hiernach ergibt sich das Zeichen für die in den Gleichungen (5) vorkommende Wurzelgröße, während $\sqrt{a}$ immer das Zeichen + beibehält. Uebrigens sind diese Coefficienten mit der Irrationalität $\sqrt{a}$ behaftet.

Es sei z. B. die Gleichung: $2y^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^2 - y - 2x + 5 = o$. Indem wir das Ganze mit 2 multipliciren, um das vollständige Quadrat zur Evidenz zu bringen, haben wir $A = 4$, $B = -4$, $C = 1 \ldots$; hieraus $a = 5$, $\tan \vartheta = \frac{1}{2}$, $\sin 2\vartheta = \frac{4}{5}$. Man nimmt die Wurzelgrößen positiv und findet $d = o$, $e = -2\sqrt{5}$; woraus $5y'^2 - 2x'\sqrt{5} + 10 = o$. Es wäre dies die Gleichung, welche man zu construiren hätte, wobei die Achse der x' von der Art ist, daß die Tangente des Winkels $x'Ax$ zum Werth $\frac{1}{2}$ hat. (Man nimmt deshalb AE beliebig und ihre Senkrechte $IE = \frac{1}{2}AE$ (Fig. 71.)

§. 128. Die vorhergehende Rechnung läuft folglich im Allgemeinen darauf hinaus, die gegebene Gleichung auf die Form (b) zu bringen, welche in Bezug auf die rechtwinkligen Achsen Ax', Ay' (Fig. 71) jetzt zu construiren übrig bleibt. Wir verlegen zu diesem Behuf den Ursprung in den Punkt (h, k), wo diese beiden Buchstaben willkührliche Größen darstellen. Durch Umänderung von y' und x' in $y' + k$ und $x' + h$ in der Gleichung (b), wird dieselbe

$$ay'^2 + (2ak + d)y' + ex' + (ak^2 + dk + eh + F) = o.$$

Um h und k zu bestimmen, lassen wir das Glied in y' und das bekannte Glied verschwinden, was den neuen Ursprung zu einem Punkt der Curve macht. Wir setzen also $2ak + d = o$, $ak^2 + dk + eh + F = o$; woraus $k = -\frac{d}{2a}$, $h = \frac{d^2 - 4aF}{4ae} = \frac{ak^2 - F}{e} \ldots$ (6). Es sind dies die Coordinaten des neuen Ursprungs, den wir in unsern Figuren durch C bezeichnen wollen, während A den alten Ursprung vorstellt. Unsere transformirte Gleichung wird hierdurch $ay^2 + ex' = o$. Die Zusammenstellung derselben mit $y'^2 = 2px'$ zeigt, daß sie einer auf ihre Achse bezogenen Parabel angehört, welche nach der einen oder der entgegengesetzten Seite gekehrt erscheint, je nachdem e positiv oder negativ ist.

Es sei die Gleichung $2y^2 + 5y - 4x = \frac{7}{8}$; man findet $k = -\frac{5}{4}$, $h = -1$. Nimmt man hiernach $AB = -1$, $BC = -\frac{5}{4}$ (Fig. 72); so verlegt man den Ursprung von A nach C, und die Gleichung wird $y'^2 = 2x'$. Die Parabel hat ihren Scheitel in C, und ihr Parameter beträgt 2.

Die Gleichung $y^2 - 2y + x = o$ gibt $y'^2 = -x$; durch $AB = BC = 1$ (Fig. 73) wird der Ursprung von A nach C versetzt. Die Parabel hat ihre Oeffnung nach der Seite der negativen Absceissen gekehrt.

Nehmen wir endlich unser erstes Beispiel wieder vor, das schon auf $5y'^2-2x'\sqrt{5}+10=0$ reducirt worden, wobei Ax', Ay' die Achsen (Fig. 71) sind; so finden wir $k=o$, $h=\sqrt{5}$: der Scheitel oder der neue Ursprung ist in M', wenn man $AM'=\sqrt{5}$ macht. Die Gleichung der Curve ist $y'^2=2x'\sqrt{\tfrac{1}{5}}$, und $\sqrt{\tfrac{1}{5}}$ ihr Parameter.

Anmerkung. Bemerkt kann noch werden, daß, wenn die Gleichung (b) die vorgelegte wäre, und die Achsen sich nicht rechtwinklig schnitten, es nicht gerade nothwendig ist, dieselben durch eine Transformation vorerst rechtwinklig zu machen: die Gleichungen (6) können hier ohne weiters zur Versetzung des Ursprungs verwendet werden. Unsere Parabel würde in solchem Falle nur auf einen ihrer Diameter bezogen sein (§. 124) in Rücksicht dessen, die Curve eben so leicht, als wenn sie auf ihre Achse bezogen wäre, construirt werden kann.

§. 129. Es existirt jedoch ein Fall, wo sich unsere Rechnung nicht bewerkstelligen läßt, nämlich wenn $e=o$. h kommt dann in der Rechnung nicht weiter vor und bleibt willkührlich, so daß man zwei Gleichungen zur Bestimmung der einen Größe k hat. Setzen wir alsdann blos $2ak+d=o$, so haben wir in dem vorliegenden Fall $ay'^2+ak^2+dk+F=o$, oder $4a^2y'^2=d^2-4aF$. Der neue Ursprung ist irgend ein Punkt der zur Achse der x parallel laufenden Geraden, deren Gleichnng $y'=k^2$.

1) Wenn $d^2-4aF>o$, so hat man $2ay'=\pm\sqrt{(d^2-4aF)}$, d. h. zwei gerade Linien, welche der Achse der x' in gleichen Entfernungen von derselben parallel laufen. Die Gleichung $y'^2+4y'+3=o$ ist in diesem Fall begriffen.

2) Wenn $d^2-4aF=o$, so hat man $y'=o$, d. h. der Ort der Gleichung (b) ist die Achse der x' selbst. Die Gleichung $y'^2+4y'+4=o$ befindet sich in diesem Fall.

3) Wenn $d^2-4aF<o$, so stellt die vorgelegte Gleichung Nichts dar, weil sie, auf $y'^2+n^2=o$ reducirt, offenbar absurd ist. Es ereignet sich dies für die Gleichung $y'^2+4y'+5=o$. Die Gleichung (b) wird, für den Fall, daß $e=o$, $ay'^2+dy'+F=o$, welche man auch wie folgt schreiben kann: $(2ay'+d)^2-d^2+4aF=o$. Das erste Glied ist größer oder kleiner als ein Quadrat, oder selbst ein vollständiges Quadrat, je nachdem $4aF>$, $<$ oder $=d^2$ ist. Es läßt sich leicht zeigen, daß die Gleichung (a) die nämlichen Umstände

darbietet und im vorliegenden Fall die Form $(ky + lx + c)^2 + Q = o$ hat, welche letztere absurd ist, wenn Q positiv, vom ersten Grad, wenn $Q = o$, und endlich zwei parallele Geraden ausdrückt, wenn Q negativ ist.

§. 130. Wir haben also bewiesen, daß, wenn $m = o$, unsere Gleichung vom zweiten Grad eine Parabel darstellt; daß ferner besondere Fälle eine einzige Gerade, zwei parallele Geraden, oder ein System zweier imaginärer Geraden liefern.

Was die Gleichung $cx^2 + dy + ex + F = o$ anlangt, so kommt dieselbe auf die Gleichung (b) zurück, mit dem Unterschied, daß x mit y und y mit x vertauscht worden. Die Curve ist also die nämliche, bezogen auf die Achse der y; es läßt sich übrigens die Versetzung des Ursprungs nach der obigen Methode bewerkstelligen. So z. B. in der Gleichung $x^2 + 3y = 2x - 1$ nimmt man $AC = 1 = h$ (Fig. 74) und trägt den Ursprung von A nach C. Dadurch wird unsere Gleichung $x'^2 + 3y' = o$, Die Parabel liegt mithin auf der Seite der negativen y, und die Achse der y' fällt mit der Achse der Curve zusammen. Wir setzen noch folgende Beispiele her:

1) $x^2 - 6x + 10 = 0$; die Curve ist imaginär.
2) $x^2 - 6x + 9 = 0$ stellt eine einzige Gerade dar, welche der Achse der y parallel läuft; unsere Gleichung ist nämlich so viel wie $x' = 3$.
3) $x^2 - 6x + 7 = o$ reducirt sich auf zwei zur Achse der y parallellaufenden Geraden.

Zweiter Fall: $B^2 - 4AC = m$ negativ.

§. 131. Die Curve hat einen Mittelpunkt, in welchen wir zuvörderst den Ursprung verlegen; denn die Gleichung (a) läßt sich hier nicht mehr auf die Form (b) bringen. Indem wir nun die im §. 112 angegebene Rechnung ausführen, wird die Gleichung (a) die Form $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Q = o \ldots$ (f) erhalten. Wir wollen suchen, die letztere von dem Glied xy zu befreien, d. h. sie in folgende: $qy'^2 + px'^2 + Q = o \ldots$ (g) umwandeln. Wir substituiren daher in diese letztere die Werthe (c) von y' und x', und vergleichen, Glied für Glied, mit der Gleichung (f) das gefundene Resultat, um ihre Identität auszudrücken. Dadurch entsteht:

$q\cos^2\vartheta + p\sin^2\vartheta = A \ldots (1)$, $q\sin^2\vartheta + p\cos^2\vartheta = C \ldots (2)$,

$$2 \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot (p - q) = B \ldots (3).$$

Diese drei Gleichungen dienen dazu, die drei Unbekannten ϑ, p und q zu bestimmen. Die Summe der beiden erstern gibt $p + q = A + C$. Bilden wir hierauf den Ausdruck $B^2 - 4AC$ oder m, indem wir die dritte quadriren und das vierfache Produkt der beiden andern davon abziehen; so kommt $m = -4pq(\sin^4\vartheta + 2\sin^2\vartheta \cdot \cos^2\vartheta + \cos^4\vartheta) = -4pq(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)^2 = -4pq$. Da die Unbekannten p und q zur Summe $A + C$ und $-\frac{1}{4}m$ zum Produkt haben, so sind sie die Wurzeln folgender Gleichung vom zweiten Grade: $z^2 - (A + C)z = \frac{1}{4}m \ldots (i)$, woraus p und $q = \frac{1}{2}(A + C) \pm \frac{1}{2}\sqrt{[B^2 + (A - C)^2]}$. Diese Wurzeln p und q sind offenbar in unserm jetzigen Falle reell. Die Differenz zwischen den Gleichungen (1) und (2) ist $(q - p)(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) = (q - p)\cos 2\vartheta = A - C$. Geht man zur Gleichung (3), so findet man $\sin 2\vartheta = \frac{-B}{q-p}$, $\cos 2\vartheta = \frac{A-C}{q-p}$, $\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{-B}{A-C}$. Der letzte Werth, welcher leicht zu construiren ist, bestimmt 2ϑ, mithin den Winkel der Achse der x' mit der Achse der x. Das Zeichen von $\operatorname{tang} 2\vartheta$ gibt zu erkennen, ob $2\vartheta >$ oder $< 90^0$ ist; in sämmtlichen Fällen ist aber $\vartheta < 90^0$ und die Achse der x' liegt sofort über der der x. Da überdies $\sin 2\vartheta$ stets positiv ist, so muß $p - q$ mit B einerlei Zeichen haben: q bedeutet folglich die größte der Wurzeln von z, wenn B negativ, dagegen die kleinste, wenn B positiv ist. An diesem Kennzeichen kann man die Wurzeln von einander unterscheiden, welche man für p und q zu wählen hat.

Es sei z. B. die Gleichung $5y^2 + 2xy + 5x^2 + 2y - 2x = \frac{5}{2}$. Durch Verlegung des Ursprungs in den Mittelpunkt, dessen Coordinaten $h = \frac{1}{4}$, $k = -\frac{1}{4}$ sind, geht die vorgelegte Gleichung in $5y^2 + 2xy + 5x^2 = 2$ über. Die Gleichung (i) wird sodann $z^2 - 10z + 24 = 0$, woraus $z = 5 \pm 1$. Da B positiv ist, so hat man $q = 4$, $p = 6$, und die für die Construction übrigbleibende Gleichung wird $4y'^2 + 6x'^2 = 2$. Die Achsen der x' und y' sind durch $\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{1}{0}$, oder $2\vartheta = 90^0$ bestimmt, d. h. die Achse der x' macht mit der Achse der x, oberhalb welcher sie liegt, einen Winkel von 45^0. Diese Constructionen haben nicht die geringste Schwierigkeit.

§. 132. **Diese Rechnung bietet keine Ausnahme dar. Zu bemerken ist, daß in dem jetzigen Falle, wo $B^2 = 4AC - m$, die Wurzelgröße der Werthe von z sich auf $\sqrt{[(A + C)^2 - m]}$ reducirt,**

das kleiner als $A + C$ ist. Die Werthe von p und q haben folglich mit $A + C$ einerlei Zeichen, so daß p und q als positiv in der Gleichung (g) betrachtet werden können, welche näher zu untersuchen jetzt die Frage ist.

1) Wenn $Q = o$, so hat man $qy'^2 + px'^2 = o$; eine Gleichung die nur für $x' = o$ und $y' = o$ bestehen kann. Die Curve reducirt sich sofort auf einen Punkt, welcher der Ursprung der x' und y' ist. Die Gleichung $y^2 - 4xy + 5x^2 + 2x + 1 = o$ befindet sich in diesem Fall. Der fragliche Punkt ist $(-1, -2)$, wie es die Rechnung lehrt, mit Hülfe der die vorgelegte Gleichung in $y^2 - 4xy + 5x^2 = o$ verwandelt wird, welche dann $z = 3 \pm 2\sqrt{2}$, ferner $\tang 2\delta = -1$, oder $2\delta = 135^0$, und endlich $(3 + 2\sqrt{2})y'^2 + (3 - 2\sqrt{2})x'^2 = o$ gibt.

2) Wenn Q positiv ist, so stellt die vorgelegte Gleichung nichts dar, weil die Gleichung (g) absurd ist, indem sich drei positive Größen nicht gegenseitig aufheben können. Es ereignet sich dies in dem vorigen Beispiel, wenn man in demselben, anstatt des letzten Gliedes 1 einen größern Werth als 1 setzt.

3) Wenn Q negativ ist, so hat man die transformirte Gleichung $qy'^2 + px'^2 = Q$. Setzt man nach und nach x' und y' Null, um die Durchschnittspunkte der Curve mit den neuen Achsen zu erhalten; so findet man $y' = \sqrt{\frac{Q}{q}} = b$, $x' = \sqrt{\frac{Q}{p}} = a$, woraus $p = \frac{Q}{a^2}$, $q = \frac{Q}{b^2}$, und hieraus $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$. Die Curve ist folglich eine Ellipse, bezogen auf den Mittelpunkt und ihre Achsen $2a$ und $2b$. Setzt man in unseren vorigen Beispielen -1 für das letzte Glied; so findet man zuvörderst $y^2 - 4xy + 5x^2 = 2$; ferner die nämlichen Werthe für z und δ, und endlich die Gleichung $(3 + 2\sqrt{2})y'^2 + (3 - 2\sqrt{2})x'^2 = 2$, welche einer Ellipse angehört, deren Achsen $\sqrt{8(3 \mp 2\sqrt{2})}$ sind.

§. 133. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die allgemeine Gleichung vom zweiten Grad allemal eine Ellipse ausdrückt, wenn m negativ ist. Zwei besondere Fälle können hier aber vorkommen, der eine, welcher Nichts darstellt, der zweite dagegen einen Punkt liefert. Für $m < o$ haben die Werthe von z einerlei Zeichen; sie sind einander gleich, wenn die Ellipse in einen Kreis übergeht.

Dritter Fall: $B^2 - 4AC = m$ positiv.

§. 134. Sämmtliche Rechnungen in §. 131 finden hier gleichfalls statt, so daß man die nämliche Transformation und die nämlichen Werthe für z und ϑ wieder bringt, mit dem Unterschiede, daß, wegen $B^2 = m + 4AC$, wobei m etwas Positives ausdrückt, die Wurzelgröße $> A + C$ ist, und ferner die beiden Wurzeln von z verschiedene Zeichen haben. Hiernach kann man in der transformirten Gleichung (g) der Wurzel q das Zeichen $+$ und der Wurzel p das Zeichen $-$ beilegen, wodurch entsteht $qy'^2 - px'^2 + Q = o \ldots$ (1). Wir wollen die Fälle, in denen Q Null, positiv oder negativ ist, näher erörtern.

1) Wenn $Q = o$, so hat man $qy'^2 = px'^2$, woraus $y' = \pm x' \sqrt{\frac{p}{q}}$, was offenbar zwei gerade Linien CD, CE (Fig. 75) ausdrückt, welche sich in dem neuen Ursprung C schneiden, und deren Winkel durch die Achse der x' halbirt wird. Die der Abscisse $x' = 1$ entsprechende Ordinate $\pm \sqrt{\frac{p}{q}}$ dient zur Construction jener Geraden; sie ist die trigonometrische Tangente der Winkel DCx', ECx'.

Die Gleichung $y^2 - 6xy + x^2 + 2y - 6x + 1 = o$ z. B. wird, insofern man den Ursprung in den Punkt $(0, -1)$, das Centrum, verlegt, folgende Form erhalten: $y^2 - 6xy + x^2 = o$. Hieraus findet man $z^2 - 2z = 8$, oder $z = 1 \pm 3$, nämlich $q = 4$, $p = -2$; und sofort $y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 = o$, oder $y' = \pm x' \sqrt{\frac{1}{2}}$. Diese Constructionen bieten ebenfalls nicht die geringsten Schwierigkeiten dar.

2) Wenn Q positiv ist, so wird die Gleichung (1): $qy'^2 - px'^2 = -Q$. Für $x' = o$ hat man $y' = \sqrt{\frac{Q}{q}} \sqrt{-1}$; man setze: $\sqrt{\frac{Q}{q}} = b$. Für $y' = o$ hat man $x' = \sqrt{\frac{Q}{p}} = a$. Durch Substitution der Werthe $p = \frac{Q}{a^2}$, $q = \frac{Q}{b^2}$ finden wir die Gleichung $a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2$, welche offenbar einer Hyperbel angehört. Man erhält ein Beispiel dieser Art, wenn man in der vorhergehenden Gleichung 5 statt des letztern Gliedes $+1$ setzt. Die Werthe von z bleiben die nämlichen, und man hat $y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 = -1$; die Achsen sind $b = 1$, $a = \sqrt{2}$.

3) Wenn Q negativ ist, so hat man $qy'^2 - px'^2 = Q$. Eine ähnliche Rechnung, oder eine bloße Verwechslung von x mit y, und

y mit x zeigt, daß die Gleichung einer Hyperbel angehört, deren Achsen ihre Stellen in Bezug auf die vorigen vertauscht haben. Setzt man z. B. in dem obigen Exempel für das letzte Glied -3 statt 1, so findet man $y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 = 1$. Die Curve durchschneidet hier die Ordinaten statt der Abscissenachse.

§. 135. Der Ort der Gleichung (I) ist die Hyperbel MAN, LOI (Fig. 76), wenn Q positiv ist, welchem wir nun verschiedene Werthe beilegen wollen. Aus dem Werthe der Achsen a und b ergibt sich, wenn man $AD = AD' = \sqrt{\frac{p}{q}}$ und die Abscisse $= 1$, oder $AD = b$ und $AC = a$ macht, daß die Geraden CD und CD′ die Asymptoten sämmtlicher Hyperbeln sind, welche man nach und nach in dem Maß erhält, wie Q wächst; der Scheitel rückt nur weiter und weiter hinaus, und die Curve öffnet sich immer mehr und mehr. Für $Q = o$ bekommt man die Asymptoten selbst, nämlich $qy'^2 - px'^2 = o$. Wird endlich Q negativ, so erhält man die Hyperbel M′A′N′, I′O′L′, welche zwischen denselben Asymptoten, aber in andern Winkeln liegt: Die Scheitel A′, O′ entfernen sich immer mehr und mehr, je größer Q wird.

§. 136. Die allgemeine Gleichung vom zweiten Grad gehört also allemal einer Hyperbel an, wenn m positiv ist; in einem besondern Fall nur findet man zwei sich schneidende gerade Linien. Die Werthe von z haben hier verschiedene Zeichen; diese Werthe sind, abgesehen vom Zeichen, einander gleich, wenn $C = -A$, in welchem Falle die Hyperbel gleichseitig wird. Da $B^2 - 4AC$ immer positiv ist, sobald A und C verschiedene Zeichen haben; so erhält man in solchem Falle eine Hyperbel, welche Werthe auch die Größen A, B, C..., haben mögen. Dasselbe findet auch statt, wenn A oder C Null ist, d. h. wenn in der vorgelegten Gleichung eines der Quadrate x^2 oder y^2, selbst wenn beide fehlen. In diesen verschiedenen Fällen bleibt der Gang der Rechnung stets der nämliche. Da jedoch in dem letztgenannten Fall sich die Sache sehr einfach gestaltet, so wollen wir denselben besonders vornehmen. Es sei sofort die Gleichung $Bxy + Dy + Ex + F = o$. Wir verlegen den Ursprung in den Mittelpunkt, indem wir $Bk + E = o$, $Bh + D = o$ machen; hieraus $k = -\frac{E}{B}$, $h = -\frac{D}{B}$, $x'y' = \frac{Q}{B^2}$, wenn man $Q = DE - BF$ setzt. Diese

Ausdrücke sind keiner Ausnahme unterworfen. Die vorgelegte Gleichung ist also die einer Hyperbel, bezogen auf ein zu den Asymptoten paralleles Achsensystem. Die Hyperbel ist eine gleichseitige, wenn die Coordinaten x und y rechtwinklig gegeneinander sind. Stellt CD′ (Fig. 76) die Achse der x′ und CD die der y′ dar, so liegt die Curve wie MAN, LOI, wenn Q positiv ist, während sie eine Lage, wie M′A′N′, L′O′I′ hat, wenn Q negativ ist. Die vorgelegte Gleichung entspricht den Asymptoten selbst, wenn $Q = o$.

Für die Gleichung $xy - 2x + y + m = 4$, wobei Ax und Ay die Achsen sind, hat man $k = 2$, $h = -1$. Macht man daher $AB = 1$, $BC = 2$ (Fig. 77), so sind Cx′, Cy′ die Asymptoten der Hyperbel, deren Gleichung $x'y' = 2 - m$ ist. Die Curve liegt wie MN, OP, wenn $m < 2$; dagegen wie M′N′, O′P′, wenn $m > 2$; endlich gibt $m = 2$ die Geraden Cx′, Cy′.

§. 137. Es ist an seinem Ort noch zu bemerken, daß in beiden Fällen von $m >$ oder $< o$, wenn in der vorgelegten Gleichung das Glied in xy fehlt, die Rechnung für die Diskussion sehr einfach wird und sich auf eine bloße Verlegung des Ursprungs in den Mittelpunkt reducirt. Auch ist es nicht nothwendig, die Coordinaten rechtwinklig zu machen, wenn sie es nicht sein sollten; im letztern Falle würde die Curve auf ein conjugirtes Diametersystem anstatt auf ein Achsensystem bezogen werden.

Es sei in der That die Gleichung: $Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = o$ Der Mittelpunkt liegt in dem Punkt $\left(-\frac{E}{2C}, -\frac{D}{2A}\right)$, d. h. man hat $2Ch + E = o$, $2Ak + D = o$, $Ay'^2 + Cx'^2 + Q = o$, wenn man $Q = Ak^2 + Ch^2 + Dk + Eh + F = F - \frac{AE^2 + CD^2}{4AC}$ setzt.

§. 138. Zur Uebung mögen folgende Beispiele dienen:

1) $2y^2 + 3x^2 - 3x - 2y + 2 = o$ und $4y^2 + 2x^2 - 3x + 2 = o$ stellen Nichts dar. Die erste hat $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ zu Coordinaten des Mittelpunktes und reducirt sich auf $2y'^2 + 3x'^2 + \frac{3}{4} = 0$. Die zweite hat den Mittelpunkt im Punkt $(\frac{3}{4}, 0)$ und gibt $4y'^2 + 2x'^2 + \frac{7}{8} = 0$.

2) $y^2 + 2x^2 - 2y + 4x + 3 = o$ gehört dem Punkt $(+1, -1)$ an.

3) $\frac{3}{2}y^2 + 3x^2 - 12x + 3 = 0$ gibt $h = 2$, $k = 0$, und so fort die Mittelpunktsgleichung $\frac{3}{2}y'^2 + 3x'^2 = 9$. Die halben Achsen der Ellipse sind $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{6}$. Man nimmt hiernach $AC = 2$ (Fig. 78)

und verzeichnet die Ellipse DFEO, indem man $DC = \sqrt{3}$, $CO = \sqrt{6}$ macht. Im Fall die Coordinaten schiefwinklig wären, würden diese Längen die halben conjugirten Diameter sein.

4) Für $y^2 + 2x^2 - 2y = o$ erhält man eine Ellipse, welche die Achse der x berührt. Der Mittelpunkt liegt auf der Achse der y in einer Entfernung $= 1$ vom Ursprung. Man hat ferner $a = 1$, $b = \sqrt{2}$.

5) $y^2 - 4x^2 + 4y + 12x - 5 = 0$ reducirt sich auf $y' = \pm 2x'$, wenn man den Ursprung von A nach C verlegt (Fig. 75), wobei $AB = \frac{3}{2}$, $BC = -2$. Man nimmt $y' = 2$ und $x' = \pm 1$ und zieht CD und CE.

6) Für $2y^2 - 3x^2 - 2y - 3x + \frac{1}{2} = 0$ liegt das Centrum im Punkt $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und es kommt $2y'^2 - 3x'^2 = -\frac{3}{4}$. Man nimmt demnach $AB = \frac{1}{2} = BC$ (Fig. 79) und verzeichnet die Hyperbel, in welcher $a = \frac{1}{2}$, $b = \sqrt{\frac{3}{8}}$ die Achsen oder zwei conjugirte Diameter sind, je nachdem die Coordinaten rechtwinklig oder schiefwinklig sind.

7) $y^2 - 2x^2 - 2y + 9 = 0$ gibt $y^2 - 2x^2 + 8 = 0$; eine Hyperbel, für welche $k = 1$, $h = 0$, $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$.

8) $3y^2 - 2x^2 + 2x + 3y = \frac{1}{2}$ gibt $AB = h = \frac{1}{3}$ (Fig. 80), $BC = k = -\frac{1}{2}$. Hieraus folgt: $3y'^2 - 2x'^2 = \frac{3}{4}$, d. h. eine Hyperbel welche nur der Lage nach von der in der Figur (79) dargestellten verschieden ist.

§. 139. Alles dieses zusammengefaßt führt zu dem Schluß, daß die allgemeine Gleichung vom zweiten Grad drei Hauptfälle darbietet. Der erste Fall, wo $m = o$, gibt eine Parabel; ausserdem unter gewissen Bedingungen eine Gerade, zwei parallele Geraden und Nichts; der zweite Fall, wo m negativ ist, liefert eine Ellipse, ausserdem unter besondern Bedingungen einen Punkt und Nichts; der dritte Fall endlich, wo m positiv ist, entspricht einer Hyperbel, bezogen entweder auf die erste oder zweite Achse, unter Umständen auch zweien sich schneidenden Geraden. Da man durch den Schnitt eines Kegels durch eine Ebene eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel, und, in so fern die schneidende Ebene durch den Scheitel geht, einen Punkt, eine Gerade oder zwei sich treffende Gerade erhält; so machen sechs von unsern acht Fällen Kegelschnitte aus. Es ist dies der Grund, warum man sagt, daß sämmtliche Linien der zweiten Ordnung, sammt ihren Varietäten, aus dem Durchschnitt eines Kegels durch eine Ebene

entstehen. Ueberall aber wo ein Kegel und eine Ebene vorhanden ist, kann es sich nicht ereignen, daß kein Durchschnitt statt fände, oder daß man zwei Parallelen erhalte; woraus ersichtlich ist, daß dieser Satz zwei Ausnahmen zuläßt.

Wird die schneidende Ebene parallel zu sich selbst fortbewegt, so entsteht, wenn sie durch den Scheitel des Kegels geht, aus der Ellipse ein Punkt, aus der Parabel eine Gerade, aus der Hyperbel endlich ein System zweier sich schneidenden Geraden. Man betrachtet deshalb den Punkt als eine Art von Ellipse, deren Achsen Null sind, die Gerade als eine Art Parabel, zwei sich schneidende Geraden als eine Hyperbel. Uebrigens sind diese Betrachtungen in Bezug auf die Theorie von keinem sonderlichen Nutzen.

Anmerkung. Der imaginäre Schnitt und das System der beiden parallelen Geraden, welche beim Schnitt des Kegels nicht gefunden wurden, entstehen beim Schnitt des Cylinders, den man als eine besondere Gattung des Kegels betrachten kann.

§. 140. Durch folgendes Verfahren erhält man die Größe und Lage der Hauptachsen. Wir nehmen vorerst an, daß der Coordinatenwinkel ein rechter sei und der Ursprung im Mittelpunkt liege, wonach die vorgelegte Gleichung ist: $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Q = o$ ..... (1). Wir denken uns aus A als Mittelpunkt mit dem Radius r einen Kreis beschrieben (Fig. 81 a), dessen Gleichung sein wird $x^2 + y^2 = r^2$. Im Allgemeinen gibt es zwischen ihm und der Curve vier Durchschnittspunkte. Um solche zu erhalten, ziehen wir eine Gerade AK von dem Ursprung nach einem dieser Punkte; es sei $y = Mx$ die Gleichung jener Geraden. Durch Elimination von x und y aus diesen Gleichungen findet man $(Ar^2 + Q)M^2 + Br^2M + Cr^2 + Q = o$ ... (2). Bei einem gegebenen Radius r lehrt diese Gleichung zwei Werthe für M kennen, was beweist, daß es nur zwei Geraden gibt, die von dem Mittelpunkt nach den vier Durchschnittspunkten gehen, oder mit andern Worten, diese Punkte liegen je zwei und zwei auf dem nämlichen Diameter. Man erhält gedachte Linien dadurch, daß man die zwei Werthe von M construirt, welches die trigonometrische Tangente ihrer Neigungswinkel gegen die Achse der x darstellt. Wenn die Wurzeln imaginär ausfallen, so ist der Radius zu groß oder zu klein genommen und der Kreis trifft die Curve nicht. Sind die Wurzeln ein-

ander gleich, so fallen die Durchschnittspunkte je zwei und zwei zusammen und der Kreis berührt die Curve. Die in diesen Punkten beiden Curven gemeinschaftliche Tangente steht senkrecht auf dem Radius des Kreises, eine Eigenschaft, welche nur den Hauptachsen zukommt. Die aus der Gleichheit der Wurzeln herkommenden Werthe von M entsprechen also diesen Achsen. Man hat alsdann (niedere Algebra §. 48): $B^2 r^4 - 4(Ar^2 + Q)(Cr^2 + Q) = o$, oder $(B^2 - 4AC) r^4 - 4Qr^2(A+C) = 4Q^2$; ferner $(Ar^2+Q) M + \frac{1}{2}Br^2 = o$, wenn man die Quadratwurzel aus der Gleichung (2), welche ein Quadrat ist, zieht. Daraus leitet man her, $r^2 = -\frac{2QM}{2AM + B}$, $M^2 - 2\alpha M = 1 \ldots (3)$, wenn man, der Kürze halber, $A - C = B\alpha$ setzt; folglich $M = \alpha \pm \sqrt{(1+\alpha^2)}$. Man nehme hiernach auf der Achse Ax das Stück $AD = 1$, errichte die Coordinate $DI = \alpha$; alsdann ist $AI = \sqrt{(1+\alpha^2)}$. Aus dem Punkt I als Mittelpunkt beschreibe man mit dem Halbmesser AI den Kreis KAK′; die Durchschnittspunkte K, K′ bestimmen die Richtungen AK, AK′ der Hauptachsen, weil die Werthe von M die trigonometrischen Tangenten der Winkel KAD, K′AD sind. Diese Linien stehen, der Construktion zu Folge, auf einander senkrecht; und in der That ist das Produkt der beiden Werthe von M gleich -1. Man findet hierauf die beiden Werthe von r, welches die Längen der Achsen sind, nämlich:

$$r^2 = 2Q \times \frac{A + C \pm \sqrt{[B^2 - 4AC + (A+C)^2]}}{B^2 - 4AC} \ldots (4).$$

Wenn $B^2 - 4AC = m$ negativ ist, so ist die Wurzelgröße $< A + C$; die beiden Werthe von r^2 sind dann entweder positiv, was eine Ellipse gibt, oder negativ, wo man Nichts erhält, oder endlich Null ($Q = o$), wo man einen Punkt bekommt. Wenn m positiv ist, so hat man eine Hyperbel; die Werthe von r^2 haben verschiedene Zeichen; man vertauscht das Zeichen — mit +, um zum Werthe der zweiten Achse zu gelangen. Für $Q = o$ findet man die zwei Geraden AK, AK′. Die vorstehende Rechnung wird unmöglich, wenn $B^2 - 4AC = o$. Es sei zur Construktion die Gleichung $y^2 - 2xy + 2x^2 = 2$ gegeben. Es ist hier $\alpha = \frac{1}{2}$, $M = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$, $DI = \frac{1}{2}$, $AI = \sqrt{\frac{5}{4}}$; der Kreis KAK′ gibt die Richtungen AK, AK′ der beiden Achsen. Für die Längen derselben oder die Radien der zwei die Ellipse berührenden Kreise hat man $r^2 = 3 \pm \sqrt{5}$. — Als zweites Uebungsbeispiel mag die schon im §. 134 behandelte Gleichung $y^2 - 6xy + x^2 + 2y - 6x + 1 = o$ dienen.

§. 141. Die eben entwickelte Methode ist in gleicher Weise auf den Fall, wo die Coordinaten einen beliebigen Winkel γ machen, anwendbar. Die Gleichung unsers Kreises ist alsdann $x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma = r^2$. Durch Elimination von x und y mittelst der Gleichung $y = Mx$ entsteht: $(Ar^2+Q)M^2 + (Br^2 + 2Q\cos\gamma)M + Cr^2 + Q = o$. Damit diese Gleichung ein vollständiges Quadrat werde, muß sein $(\frac{1}{2}Br^2+Q\cos\gamma)^2 - (Ar^2+Q)(Cr^2+Q) = o$, oder $(B^2-4AC)r^4 - 4Qr^2(A+C-B\cos\gamma) = 4Q^2\sin^2\gamma$... (5). Hierauf kommt $(Ar^2+Q)M + \frac{1}{2}Br^2 + Q\cos\gamma = o$... (6). Die Gleichung (5), welche man wie eine Gleichung vom zweiten Grad behandelt, gibt r^2, welches letztere man aus den Gleichungen (5) und (6) eliminiren kann. Die Gleichung (6) endlich bestimmt M, worauf sich die Gleichung $y = Mx$ construiren läßt.

§. 142. Man hat öfters eher zum Zweck, die Natur und Form einer Curve, deren Gleichung gegeben ist, zu erkennen, als eine genaue Construction derselben zu bewerkstelligen. Das folgende Verfahren gewährt den Vorzug dergleichen Umstände schnell anzuzeigen, auch hat es nicht, wie das vorige, den Nachtheil, irrationale Größen in die Coefficienten einzuführen. — Da nach dem früher Gesagten sämmtliche in der allgemeinen Gleichung (a) begriffenen Linien zum Voraus bekannt sind; so hat man nur nöthig, um sie von einander zu unterscheiden, für jede derselben ein charakteristisches Merkmal aufzufinden. Ein solches Merkmal besitzen wir in den Grenzen der Curve, welche in den Fällen der Ellipse, der Parabel und Hyperbel sehr verschieden ausfallen. Um zu dergleichen Grenzen zu gelangen, lösen wir die Gleichung (a) in Bezug auf y auf; wir erhalten alsdann einen Ausdruck von folgender Form: $y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{(mx^2 + nx + p)}$, wobei α, β, m, n und p bekannte Größen sind, und zwar ist

$$\alpha = -\frac{B}{2A}, \beta = -\frac{D}{2A}, m = \frac{B^2-4AC}{4A^2}, n = \frac{2(BD-2AE)}{4A^2},$$
$$p = \frac{D^2-4AF}{4A^2}.$$

Zu jedem Werthe von x gehören zwei Punkte der Curve, so lange die Wurzelgröße reell ist; wird letztere imaginär, so entspricht der betreffenden Absciße kein Punkt der Curve; wird endlich die Wurzelgröße Null, so erhält man nur einen Punkt. Die Grenzen beziehen sich also auf die Ausdehnung, in welcher der Wurzelausdruck von dem reellen Zustand in den imaginären übergeht. Da nun für hin-

länglich große Werthe von x, sowohl positive als negative, das Trinom $mx^2 + nx + p$ das Zeichen des ersten Gliedes mx^2 (siehe niedere Algebra §. 49) annimmt; so wird, wenn m negativ ist, für dergleichen Werthe die Wurzelgröße imaginär: die Curve ist folglich nach beiden Seiten hin begrenzt, während sie sich nach beiden Richtungen ins Unendliche erstreckt, wenn m positiv ist. $m = o$ endlich reducirt den Wurzelausdruck auf $\sqrt{(nx + p)}$, woraus ersichtlich ist, daß sich die Curve nur auf einer Seite ins Unendliche ausdehnt, indem das Zeichen von nx mit x sich ändert. Die Natur unserer Curven hängt folglich von dem Zeichen von m ab, was uns abermals nöthigt, in unserer allgemeinen Gleichung drei Hauptfälle zu unterscheiden, nämlich je nachdem $m = B^2 - 4AC$ negativ, positiv oder Null ist.

Wir bemerken jedoch vor allen Dingen, daß, um die einer bestimmten Abscisse $AP = x'$ entsprechenden Ordinaten PM, PM' (Fig. 81 und 82) zu construiren, man zuvörderst parallel zur Achse der y, deren Richtung gegeben und beliebig ist, das Stück $PN = \alpha x' + \beta$ anlegen, alsdann auf dieser Ordinate von N aus die Stücke NM und NM' gleich dem Wurzelausdruck $\sqrt{(mx'^2 + nx' + p)}$ auf- und abwärts tragen muß, wonach N die Mitte von MM' ist. Alle Punkte N, welche der Gleichung $y = \alpha x + \beta \ldots (2)$ genügen, schneiden folglich die mit der Achse der y parallel gezogenen Sehnen in zwei gleiche Theile; die Gerade BN ist also ein Durchmesser der Curve.

In den Punkten D und D', den Durchschnittspunkten der Curve mit diesem Diameter, finden die Gleichungen (1) und (2) zu gleicher Zeit statt; und zwar sind jene Punkte durch die Wurzeln der Gleichung $mx^2 + nx + p = o \ldots (3)$ bestimmt. Man sieht ferner, daß die entsprechenden Ordinaten ED, E'D' hier die Curve insbesondere berühren, weil, da die Wurzelgröße Null geworden, die vorgelegte Gleichung das Quadrat von $y - \alpha x - \beta = o$ ist, mithin in den Punkten D und D' je zwei Durchschnittspunkte in einen einzigen zusammenfallen.

Erster Fall. Curven, welche nach allen Seiten hin begrenzt sind. Charakter: m negativ.

§. 143. 1) Die Wurzeln der Gleichung (3) seien reell. Bezeichnet man diese Wurzeln mit a und b, nimmt dann $AE = a$, $AE' = b$ (Fig. 81), so hat man die Durchschnittspunkte des Diameters mit der Curve und zugleich die Berührungspunkte der mit der

Ordinatenachse parallel laufenden Tangenten. Der Wurzelausdruck von (1) läßt sich in folgender Form: $\sqrt{-m(x-a)(x-b)}$ darstellen; er ist nur insofern reell, als die Factoren $x-a$, $x-b$ verschiedene Zeichen haben, mithin x zwischen a und b fällt. Die Curve liegt also ganz zwischen den der Ordinatenachse parallel laufenden Linien EF und E′F′; sie ist wie der Kreis in sich selbst zurückkehrend und geschlossen; es ist eine Ellipse.

Wir bemerken, daß, um die Punkte E und E′ zu erhalten, wir aus der Gleichung (3) die Wurzeln von der Form $x = h \pm \sqrt{f}$ gewonnen, mithin $AK = h$ und dann $KE' = KE = \sqrt{f}$ aufgetragen haben. C ist folglich die Mitte des Diameters oder der Mittelpunkt der Ellipse. Den conjugirten Diameter findet man dadurch, daß man die Centralordinate CO′, von dem ersten Diameter an gerechnet, d. h. den Werth sucht, welchen der Wurzelausdruck $\sqrt{(mx^2 + nx + p)}$ für $x = h$ annimmt. Die Curve auf solche Weise auf zwei conjugirte Diameter bezogen ist leicht zu construiren. Es sei z. B. die Gleichung $3y^2 - 6xy + 9x^2 - 2y - 6x + \frac{7}{3} = 0$. Sie gibt in Bezug auf y aufgelöst: $y = x + \frac{1}{3} \pm \sqrt{(-2x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{2}{3})}$. Man nimmt $AB = \frac{1}{3}$ (Fig. 81) und zieht den Diameter BN, der $y = x + \frac{1}{3}$ zur Gleichung hat, demnach mit Ax, wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, einen Winkel von 45° Grad macht. Setzt man den Wurzelausdruck gleich Null, so kommt $x^2 - \frac{4}{3}x = -\frac{1}{3}$. Hieraus $x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}$; folglich $AK = \frac{2}{3}$, $KE = KE' = \frac{1}{3}$, wodurch der Mittelpunkt C und die Durchschnittspunkte D, D′ der Curve mit dem Diameter BN bestimmt sind. Ueberdies wird die Curve von den Tangenten EF, E′F′ begrenzt, weil die Wurzelgröße, unter der Form $\sqrt{-2(x-1)(x-\frac{1}{3})}$ dargestellt, zeigt, daß y nur reell wird, wenn $x > \frac{1}{3}$ und < 1 ist. Setzt man in dem Wurzelausdruck $x = \frac{2}{3}$, so wird derselbe gleich $\sqrt{\frac{2}{9}}$; es ist dies einer der halben conjugirten Diameter CO′, während CD der andere ist. Die Curve läßt sich hiernach leicht verzeichnen. Man findet für die größte und kleinste Ordinate $y = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$ (§. 110).

Ebenso gibt die Gleichung $y^2 - xy + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ die Ellipse DOD′O (Fig. 84). Hier ist $AK = 2$, $EK = E'K = \sqrt{2}$, $CK = 1$; C ist der Mittelpunkt. Für $y = 0$ kommt $x^2 - 2x + 1 = 0$, Quadrat von $x - 1$; die Abscissenachse bildet folglich eine Tangente an die Curve im Punkte I, wenn man $AI = 1$ nimmt. Man findet ferner $OO' = 2b' = \sqrt{2}$. Die größte und kleinste Ordinate sind 2 und 0.

Daß bei dergleichen Constructionen auch hauptsächlich auf die Zei-

chen Rücksicht genommen werden muß, versteht sich von selbst. Für $4y^2 + 8yx + 8x^2 + 12x + 8y + 1 = 0$ z. B. hat man $y = -x - 1 \pm \sqrt{(-x^2 - x + \frac{3}{4})}$. Man construirt den Diameter BD (Fig. 85), dessen Gleichung $y = -x - 1$ ist. Aus $x^2 + x = \frac{3}{4}$ folgt $x = -\frac{1}{2} \pm 1$; man nimmt $AK = -\frac{1}{2}$, $KE = KE' = 1$, wonach sich die die Ellipse begrenzenden Tangenten ergeben. C ist der Mittelpunkt unserer Ellipse, für die man weiter $b' = 1$ findet.

2) Die Wurzeln der Gleichung (3) seien gleich und a ihr Werth. Der Wurzelausdruck ist dann mit $\sqrt{-m(x-a)^2}$ gleichgeltend, wodurch die Gleichung (1) in $y = \alpha x + \beta \pm (x - a)\sqrt{-m}$ verwandelt wird. Man kann y nur dadurch reell machen, daß man $x = a$ nimmt, woraus $y = a\alpha + \beta$. Man erhält also nur einen Punkt, dessen Coordinaten bekannt sind. Man sieht in der That leicht, daß in diesem Fall die vorgelegte Gleichung sich auf die Form $(y - \alpha x - \beta)^2 + (x - a)^2 m = 0$ bringen läßt, wo der erste Theil, als die Summe zweier positiven Größen, nicht anders Null werden kann, als wenn jede einzeln Null ist; die vorgelegte Gleichung zerfällt hiernach von selbst in zwei andere. Die Gleichung $y^2 - xy + \frac{5}{4}x^2 - 2x + 1 = 0$ gibt den Punkt, dessen Coordinaten $x = 1$ und $y = \frac{1}{2}$ sind. Die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ gibt den Ursprung.

3) Die Wurzeln der Gleichung (3) seien imaginär. Für keinen Werth von x darf hier das Trinom $-mx^2 + nx + p$ sein Zeichen ändern (niedere Algebra §. 49), das stets mit dem des größten Gliedes $-mx^2$ einerlei ist. Da $\sqrt{(-mx^2 + nx + p)}$ fortwährend imaginär bleibt, so drückt die vorgelegte Gleichung Nichts aus. In der That geht in diesem Falle unsere Gleichung in

$$(y - \alpha x - \beta)^2 + (mx^2 - nx - p) = 0$$

über, deren zwei Theile positiv sind, sich daher nicht gegenseitig aufheben können; es ist folglich ungereimt, ihre Summe = 0 zu setzen, weil der zweite nicht, wie vorhin, auf Null gebracht werden kann. Es ereignet sich dies für die Gleichung

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x + 4 = 0.$$

Damit m oder $B^2 - 4AC$ negativ sei, müssen die drei ersten Glieder der vorgelegten Gleichung, nämlich $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ einen Ausdruck liefern, der größer als ein vollständiges Quadrat ist. In dem ersten unserer obigen Beispiele sind diese Glieder

$$3(y^2 - 2xy + 3x^2) = 3[(y - x)^2 + 2x^2].$$

Anmerkung. Sucht man die Relationen auf, welche zwischen

den Coefficienten der Gleichung (1) statt finden müssen, damit die in diesem Paragraphen gewonnenen Resultate zum Vorschein kommen, so hat man Folgendes:

Analytische Bedingungen.

$B^2 - 4AC$	$(BD - 2AE)^2 - (D^2 - 4AF)(B^2 - 4AC)$
Negativ.	Positiv.
Negativ.	Null.
Negativ.	Negativ.

Geometrische Bedeutung der Gleichung.

$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o.$

Eine Ellipse.

Ein einziger reeller Punkt.

Nichts Reelles.

§. 144. Wir wollen jetzt die Bedingungen aufsuchen, unter welchen die allgemeine Gleichung vom zweiten Grad einen Kreis darstellt, indem wir die Coordinaten rechtwinklig annehmen. Die Gleichung $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o$ mit der allgemeinen Gleichung des Kreises $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ oder $y^2+x^2-2\beta y-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2-r^2 = o$ Glied für Glied verglichen, gibt $A = C$, $B = o$. Sind folglich die Coordinaten rechtwinklig, so gehört die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade einem Kreise an, wenn in ihr das Glied in xy fehlt und ausserdem die Coefficienten von x^2 und y^2 gleich sind. Man hat ferner $D = -2A\beta$, $E = -2A\alpha$, $F = A(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)$, woraus $\alpha = -\frac{E}{2A}$, $\beta = -\frac{D}{2A}$, $r^2 = \frac{E^2+D^2-4AF}{4A^2}$. Es sind dies die Coordinaten des Mittelpunkts und der Radius des Kreises, der hiernach leicht construirt werden kann. Man bemerke jedoch, daß hier zwei Ausnahmen statt finden, nämlich wenn der Zähler des Werthes von r^2 Null oder negativ ist. Im ersten Fall gibt es nur einen Punkt, im zweiten dagegen gar keine Linie. So z. B. findet man, daß die Gleichung $2y^2 + 2x^2 - 4y - 4x + 1 = 0$ die eines Kreises ist, dessen Radius $\sqrt{\frac{1}{2}}$ beträgt und dessen Mittelpunkt im Punkt (1, 1) liegt.

Im Fall die Coordinaten schiefwinklig sind, beobachtet man denselben Gang, indem man von der Gleichung (3) des Paragraphen 59 ausgeht.

Zweiter Fall. Curven, welche nach allen Seiten unbegrenzt sind. Charakter: m positiv.

§. 145. Hier betragen die drei Glieder $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ weniger als ein vollständiges Quadrat.

1) Die Wurzeln a und b der Gleichung (3) seien reell. $a = AE$, $b = AE'$ (Fig. 82) geben, wie vorhin, die Durchschnittspunkte D und D′ der Curve mit dem Diameter BN, u. s. f. die Tangenten EF, E′F′. Der Wurzelausdruck unter die Form $\sqrt{m(x-a)(x-b)}$ gebracht, wird nur reell, wenn $(x-a)$ und $(x-b)$ einerlei Zeichen haben, d. h. wenn $x >$ oder $<$ a und b ist, die Wurzelgröße wird also für alle innerhalb der Grenzen $a = AE$ und $b = AE'$ liegenden Werthe von x imaginär; die Curve erstreckt sich auf beiden Seiten der Grenzen EF, E′F′, in Gestalt zweier Zweige, ins Unendliche; es ist eine Hyperbel.

Um den conjugirten Diameter von DD′ zu erhalten, setzen wir, da der Mittelpunkt C in der Mitte von DD′ liegt, unter dem Wurzelzeichen $x = AK = h$, wobei wir das Resultat reell machen (§. 116); auf solche Weise gelangt man zu dem Werthe von b'. Ohne alle Schwierigkeit läßt sich hierauf die Lage der Asymptoten ermitteln; wir werden übrigens bald ein Mittel kennen lehren, wonach man diese Geraden noch leichter bestimmen kann.

Es sei die Gleichung $y^2 - 2xy - x^2 - 2y + 8x - 3 = 0$. Sie gibt, nach y aufgelöst, $y = x + 1 \pm \sqrt{(2x^2 - 6x + 4)}$. Man construirt zuvörderst den Durchmesser BN, dessen Gleichung $y = x + 1$ ist. Das Trinom $2x^2 - 6x + 4 = 0$ liefert $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$, und die Wurzelgröße erhält die Form $\sqrt{2(x-1)(x-2)}$. Indem man $AK = \frac{3}{2}$, $EK = E'K = \frac{1}{2}$ nimmt, erhält man die Grenzen EF, E′F′, welche überdieß die gesuchte Curve in den Punkten D um D′ berühren. Da für reelle Punkte der Curve $x > 2$ oder < 1 sein muß, so hat man die in der Figur 82 dargestellte Hyperbel MM′, QQ′.

Um den conjugirten Diameter von DD′ zu finden, setzt man $x = AK = \frac{3}{2}$ in der Wurzelgröße $\sqrt{(2x^2 - 6x + 4)}$ und macht den dadurch erhaltenen Werth reell, man hat solchergestalt $b' = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Man nimmt jetzt $D'F' = D'H = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und construirt das eingeschriebene Parallelogramm, dessen Diagonalen GF′, FH die Asymptoten unserer Curve sind.

2) Die Wurzeln der Gleichung (3) seien imaginär. Die Curve

schneidet dann ihren Diameter BN (Fig. 86) nicht. Da nun das Trinom mx^2+nx+p stets mit $+mx^2$ einerlei Zeichen behält, welchen Werth auch x haben mag (Algebra §. 49); so gibt jede Abscisse reelle Ordinaten: die Curve erstreckt sich also auf beiden Seiten ins Unendliche, sie ist eine Hyperbel, welche die in der Figur 86 dargestellte Lage hat. Was die conjugirten Diameter anlangt, so bemerken wir vorerst, daß der Mittelpunkt in der Linie BN, welche die Curve nicht schneidet, liegt. Befände sich nun der Ursprung im Mittelpunkt, so würden gleiche und mit entgegengesetzten Zeichen behaftete Abscissen gleichen Ordinaten entsprechen (§. 112); der Wurzelausdruck müßte daher von der Form $\sqrt{(mx'^2+p)}$ sein. Um folglich den Ursprung in den Mittelpunkt zu verlegen, muß man $x=x'+h$ setzen und h dergestalt bestimmen, daß das zweite Glied von mx^2+nx+p verschwinde. Man findet auf diese Weise für die Abscisse h des Ursprungs $h=-\frac{n}{2m}$. Man nimmt hiernach $AK=h$, und die Ordinate KC bestimmt den Mittelpunkt C. Setzt man hierauf $x=h$ in dem Wurzelausdruck $\sqrt{(mx^2+nx+p)}$, so gibt derselbe den Werth von $DG=a'$. Um b' zu finden, muß man die Durchschnittspunkte der Curve mit BN suchen. Indem man hierbei den imaginären Theil der Wurzeln von $mx^2+nx+p=o$ reell macht, erhält man $KO=KO'$ für die vom Fußpunkt der Ordinate des Centrums an gerechneten Abscissen der Endpunkte des conjugirten Diameters.

Da die zu dem Diameter BN parallelen Geraden FH, GI die Curve in den Punkten D und D' berühren; so werden die Ordinaten O'F, IH das eingeschriebene Parallelogramm und die Asymptoten IF, GH bestimmen.

Es sei die Gleichung $y^2+2xy-2y-x=o$. Aus ihr folgt zuerst $y=-x+1\pm\sqrt{(x^2-x+1)}$. Die Gleichung des Diameters BN (Fig. 86) ist $y=-x+1$. Aus $x^2-x+1=0$ ergibt sich $x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Der Diameter BN trifft also die Curve nicht. x^2-x+1 bleibt fortwährend positiv, y ist daher immer reell; man hat demnach die in Figur 86 dargestellte Hyperbel. — Um die conjugirten Diameter zu finden, construirt man $x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $AK=\frac{1}{2}$, $KO=KO'\ \frac{1}{2}\sqrt{3}$ geben den Mittelpunkt C und den zweiten Diameter EE'. Setzt man ferner $x=\frac{1}{2}$ in $\sqrt{(x^2-x+1)}$, so hat man $a=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

3) Die Wurzeln der Gleichung (3) seien gleich. Der Wurzelausdruck ist dann gleichgeltend mit $\sqrt{m(x-a)^2}$ und die Gleichung (1)

verwandelt sich in $y = \alpha x + \beta \pm (x-a)\sqrt{m}$, oder $y = x(\alpha \pm \sqrt{m}) + \beta \mp a\sqrt{m}$. Man erhält folglich zwei in einem Punkt des Diameters, für welchen $x = a$, sich schneidende Geraden, die leicht construirt werden können, weil man ihre Gleichungen kennt. Man findet einen zweiten Punkt für jeden dieser Linien, wenn man $x = o$ setzt; es entsteht dadurch $y = \beta \pm a\sqrt{m}$, d. h. man muß die Größe $a\sqrt{m}$ auf die Achse der y ober- und unterhalb ihres Durchschnittspunktes mit dem Diameter tragen. Durch Verbindung der eben erhaltenen Punkte mit dem ersten, welcher unsern gesuchten Geraden gemeinsam ist, werden dieselben construirt sein.

Durch Versetzen und Quadriren erhält man offenbar

$$(y - \alpha x - \beta)^2 - m(x - a)^2 = o;$$

die vorgelegte Gleichung ist also in zwei in Bezug auf x und y rationale Factoren vom ersten Grad zerlegbar, von denen ein jeder unabhängig vom andern gleich Null gemacht werden kann: es erklärt dies analytische Factum das Dasein der im vorliegenden Fall gefundenen Geraden.

Es sei die Gleichung $4y^2 - 8xy + x^2 + 4y + 2x - 2 = o$. Man findet $y = x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(3x^2 - 6x + 3)}$. Aus $3x^2 - 6x + 3 = 0$ folgt $x = 1$; der Diameter BN (Fig. 87), dessen Gleichung $y = x - \frac{1}{2}$ ist, wird folglich in einem einzigen Punkt, für den $DA = 1$, geschnitten. Da die vorgelegte Gleichung mit $y = x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{3}$ gleichbedeutend ist, so reducirt sich die Curve auf ein System zweier geraden Linien, welche sich schneiden. $x = o$ gibt $y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$; man nimmt hiernach $BE = BE' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, und zieht die Linien EN, E'N. — Es sei noch der Gleichung $y^2 - 2xy - 3x^2 - 4k^2 = o$. Man findet zuerst $y = x \pm 2\sqrt{(x^2 + k^2)}$. $y = x$ gibt den Diameter BN (Fig. 88), der von der Curve nicht geschnitten wird. Man hat sofort die Hyperbel MO, M'O', deren Mittelpunkt in C liegt, und erster Diameter OO' ist, wenn $CO = CO' = 2k$ genommen wird. $CE = CE' = k$ gibt hierauf dem zweiten Diameter und die Asymptoten HF, IG. In dem Maße wie k abnimmt, nähert sich die Curve dem Mittelpunkt und den Asymptoten, welche ungeändert bleiben, und geht in die letztern über, wenn $k = o$. Bekommt endlich k^2 ein entgegengesetztes Zeichen, so erhält man die in dem andern Winkel zwischen denselben Asymptoten liegende Hyperbel GD', ID, von denen sie sich immer mehr und mehr entfernt, in dem Maße wie k wächst.

Anmerkung. Für $A = -C$ und $B = o$ verwandelt sich un-

sere allgemeine Gleichung in $Ay^2 - Ax^2 + Dy + Ex + F = o$, welche sich auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$\left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 - \left(x - \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 - E^2 - 4AF}{4A^2},$$

woraus man sieht, daß, wenn die Coordinaten zu einander senkrecht sind, die Curve eine gleichseitige Hyperbel ist, die $-\frac{D}{2A}$, $+\frac{E}{2A}$ zu Coordinaten ihres Mittelpunktes hat. Es ist dieser Fall dem für die Ellipse in §. 144 behandelten analog.

§. 146. Wir müssen bemerken, daß das eben befolgte Verfahren nur so lange Anwendung finden kann, als nicht $A = o$ ist. Hat dies aber statt, so vertauscht man in unsern obigen Formeln x mit y, C mit A und D mit E, was eine bloße Verwechslung der Achsen zur Folge hat. Der Ausdruck $B^2 - 4AC$ oder m reducirt sich auf B^2 und bleibt positiv, was abermals eine Hyperbel gibt. Uebrigens ist es bei der Diskussion der Gleichung, in welcher das Glied Ay^2 fehlt, vorzuziehen, dieselbe in Bezug auf x aufzulösen, und in Rücksicht der Achse der x auf ähnliche Weise zu verfahren, wie wir hier oben hinsichtlich der Achse der y gethan.

Es sei die Gleichung $x^2 - 2xy + 2x - 3y + c = o$ (Fig. 89). Man erhält $x = y - 1 \pm \sqrt{(y^2 + y - c + 1)}$. Die durch die Gleichung $y = x + 1$ dargestellte Gerade DD′ ist ein Diameter, d. h. sie schneidet alle zur Achse der x parallel laufenden Sehnen in zwei gleiche Theile. Aus der Gleichung $y^2 + y = c - 1$ folgt $y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(c - \frac{3}{4})}$. Für den Fall, daß $c > \frac{3}{4}$, nimmt man $AK = \frac{1}{2}$, $KE = KE' = \sqrt{c - \frac{3}{4}}$; hierdurch werden die Durchschnittspunkte der Hyperbel MD, M′D′ mit dem Diameter DD′ bestimmt. Setzt man $y = -\frac{1}{2}$ in $\sqrt{(y^2 + y - c + 1)}$ und macht das Resultat reell, so erhält man $\sqrt{(c - \frac{3}{4})}$ für den Werth des zu DD′ conjugirten Diameters, und die Asymptoten F′G und FH, wovon die zweite parallel zur Achse der y läuft. Man findet die Asymptoten selbst, wenn $c = \frac{3}{4}$ ist. Für $c < \frac{3}{4}$ erhält man ebenfalls eine zwischen denselben Asymptoten, nur in andern Winkeln liegende Hyperbel HN, F′N′.

§. 147. Wird zu dem unter den Wurzelzeichen stehenden Ausdruck $m\left(x^2 + \frac{nx}{m} + \frac{p}{m}\right)$ der allgemeinen Gleichung (1) die Größe $\frac{n^2}{4m^2}$

addirt und dann wieder abgezogen, damit daselbst ein vollständiges Quadrat zum Vorschein komme; so hat man

$$y = \alpha x + \beta \pm \frac{1}{2\sqrt{m}} \sqrt{[(2mx + n)^2 + 4mp - n^2]}.$$

Wenn man nun den Wurzelausdruck, der die Form $\sqrt{(z^2-1)}$ hat, nach dem in §. 49 der niedern Algebra gegebenen Verfahren entwickelt; so wird man, wie in §. 102, eine Reihe von Gliedern finden, in denen $z = 2mx + n$ im Nenner erscheint und die mit Ausnahme des einzigen ersten Gliedes, in dem Maße kleiner werden wie x wächst. Indem man also 1 wegläßt, wird man die Gleichungen der Asymptoten unserer Hyperbel erhalten, nämlich: $Y = \alpha x + \beta \pm \frac{2mx + n}{2\sqrt{m}}$ .... (4).
Hieraus folgt, daß, nachdem zuvörderst die vorgelegte Gleichung aufgelöst worden, man das Quadrat unter dem Wurzelzeichen ergänzen und die andern Glieder dann vernachläßigen müsse, um die Gleichungen der Asymptoten zu finden. Es ist leicht, diese Gleichungen zu construiren. Die Geraden schneiden sich in dem Punkt $\left(\frac{-n}{2m}, \beta - \frac{\alpha n}{2m}\right)$ welcher der Mittelpunkt ist; man erhält einen zweiten Punkt dadurch, daß man $x = o$ setzt, was für die Abstände vom Ursprung $\beta \pm \frac{n}{2\sqrt{m}}$ gibt; hiernach wird die Größe $\frac{n}{2\sqrt{m}}$ auf die Achse der y auf- und abwärts des Durchschnittspunktes derselben mit dem Diameter getragen. In dem ersten Beispiel des §. 146 war, $y = x + 1 \pm \sqrt{(2x^2 - 6x + 4)}$. Aus der Wurzelgröße entsteht, wenn man $\frac{9}{2}$ addirt und subtrahirt, $\sqrt{[2(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2}]}$. Vernachläßigt man $\frac{1}{2}$, so erhält man für die Gleichungen der Asymptoten (Fig. 82) $Y = x + 1 \pm (2x - 3)\sqrt{\frac{1}{2}}$. Indem x Null gesetzt wird, findet man $Y = 1 \pm 3\sqrt{\frac{1}{2}}$; man muß daher $3\sqrt{\frac{1}{2}}$ von B nach i und i′ tragen, wodurch die Asymptoten Ci und Ci′ bestimmt sind. In dem letzten Beispiel des erwähnten Paragraphen war $y = x \pm 2\sqrt{(x^2 + k^2)}$. Indem man k^2 vernachläßigt, kommt $y = x \pm 2x$ für die Gleichungen der Asymptoten. Die Diskussion der Gleichung wird sehr leicht, wenn das Glied in x^2 oder y^2 fehlt. So z. B. gibt die Gleichung $Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o$, wenn man die Auflösung vornimmt, die Division ausführt und die bekannten Coefficienten durch h, k und l darstellt:

$$y = -\frac{Cx^2 + Ex + F}{Bx + D} = hx + k + \frac{1}{Bx + D}.$$

Construirt man nun die Gerade FC (Fig. 89), die $Bx + D = o$ zur Gleichung hat, so ist diese zur Achse der y parallel laufende Linie eine der Asymptoten der Curve. Denn je mehr x nach der Grenze $-\frac{B}{D}$ hinzu abnimmt, desto größer wird y, das an dieser Grenze unendlich ist; woraus hervorgeht, daß die Curve sich immer mehr und mehr der Geraden FC nähert, was die charakterische Eigenschaft der Asymptoten ist. Construirt man ferner die Gerade FG, die $y = hx + k$ zur Gleichung hat, so ist ersichtlich, daß die irgend einer Abscisse entsprechende Ordinate gefunden wird, indem man zu der Ordinate der Geraden F′G die Länge $\frac{1}{Bx + D}$ hinzufügt. Da nun der letzte Bruch desto kleiner wird, je größer man x nimmt, und für $x = \infty$ vollends verschwindet; so ist klar, daß die Curve sich immer mehr und mehr der Geraden F′G nähert, die daher die zweite Asymptote ist. Fehlt hingegen das Glied in x^2, so löst man die Gleichung in Bezug auf x auf, und man findet ähnlicherweise die beiden Asymptoten, von denen eine mit der Abscissenachse parallel läuft. Fehlt also in der Gleichung der Curve eins der beiden Quadrate x^2 oder y^2, so läuft eine ihrer Asymptoten zu derjenigen Coordinatenachse parallel, von welcher das Quadrat nicht vorhanden ist. Für die Gleichung $x^2 - 2xy + 2x - 3y + 1 = o$ hat man $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 3} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{2x + 3}$. Die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ gehört der Geraden F′G an (Fig. 89); die Gleichung $2x + 3 = o$ wird construirt, indem man $AI = -\frac{3}{2}$ nimmt und FH parallel zu Ay zieht: es sind dies die beiden Asymptoten. Der Rest der Construction bietet keine weitere Schwierigkeit dar.

Es sei noch die Gleichung $2y^2 + 3xy - 8y - 3x + 1 = 0$, sie gibt $x = -\frac{2y^2 - 8y + 1}{3y - 3} = -\frac{2}{3}y + 2 + \frac{5}{3y - 3}$. Die Geraden GH, FI (Fig. 86), welche bezüglich $3y - 3 = o$ und $x = -\frac{2}{3}y + 2$ zu Gleichungen haben, sind die Asymptoten, von denen die erste zur Achse der x parallel läuft.

Fehlen beide Quadrate x^2 und y^2 zugleich, oder ist $xy + Dy + Ex + F = o$, so hat man $y = -\frac{Ex + F}{x + D} = -E + \frac{DE - F}{x + D}$. In die-

sem Falle läuft eine Asymptote mit der Abscissenachse und die andere mit der Ordinatenachse parallel. Man könnte die Gleichung diskutiren, indem zuvörderst der Ursprung in den Mittelpunkt verlegt worden; die Hyperbel würde alsdann auf ihre Asymptoten bezogen sein (§. 112), und ihre Gleichung die Form $xy = m^2$ annehmen.

Dritter Fall. Curven, welche blos nach einer Richtung begrenzt sind. Charakter: $m = o$.

§. 148. Wenn m oder $B^2 - 4AC = o$, so bilden die drei ersten Glieder der vorgelegten Gleichung, oder $Ay^2 + Bxy + Cx^2$, ein vollständiges Quadrat. Der Wurzelausdruck der Gleichung (1) reducirt sich im vorliegenden Fall auf $\sqrt{(nx+p)}$. Nachdem man zuvörderst den Diameter BN (Fig. 71), dessen Gleichung $y = \alpha x + \beta$ ist, gezogen hat, findet man dessen Durchschnittspunkt D mit der Curve, wenn $nx + p = o$ gesetzt wird. Es bezeichne $x = a = AE$ die Wurzel dieser Gleichung; der Wurzelausdruck wird dadurch $\sqrt{n(x-a)}$ und ist nur reell, wenn n und $x - a$ einerlei Zeichen haben; x ist folglich $> a$ und die betreffende Curve wie M′DM gelegen, wenn n positiv ist, während x von a übertroffen wird und die Curve die Lage ODO′ hat, wenn n negativ ist. Die nach einer Seite hin sich erstreckende Curve ist also eine Parabel. Man kann leicht den Parameter dieses Diameters mit Hülfe eines einzigen Punktes der Curve finden, und dann zur Construction derselben schreiten (§. 125).

Es sei die Gleichung $y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 - 2y - x + 5 = 0$. Aus ihr folgt $y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{(2x-4)}$. Man nimmt $AE = 2$ (Fig. 71), wonach die mit der Ordinatenachse parallel geführte Gerade EF die Curve in D berührt und zugleich die Grenze derselben ist. Man hat ferner $AB = 1$, $DE = 2$, und die Curve ist wie M′DM gelegen.

Für die Gleichung $y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 - 2y + 3x - 3 = o$ erhält man den nämlichen Diameter. Da der Wurzelausdruck von der Form $\sqrt{(-2x+4)}$ ist, so hat man die Parabel ODO′. Ist der Coefficient n ebenfalls Null, so verwandelt sich unsere Gleichung in folgende: $y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{p}$.

1) Diese Gleichung stellt ein System von zwei parallelen Geraden dar, wenn n positiv ist. Man construirt dieselben dadurch, daß man die Größe $\sqrt{p}$ auf die Achse der y auf- und abwärts von dem Durchschnittspunkt B der letztern mit dem Diameter BN nach BD und BD′ trägt (Fig. 90). $(y+x)^2 - 2y - 2x = 1$ gibt $y = -x + 1 \pm \sqrt{2}$.

Man nimmt $AB = AN = 1$, wonach BN der Diameter ist; hierauf macht man $BD = BD' = \sqrt{2} = BN$, und zieht DE, D'E' parallel zu BN.

2) Unsere beiden Geraden fallen in eine einzige zusammen, wenn $p = o$ ist, wo man hat $y = \alpha x + \beta$. Hierher gehört die Gleichung $(y+x)^2 - 2y - 2x + 1 = o$, welche die einzige gerade Linie BN (Fig. 90) darstellt.

3) Die beiden Geraden werden imaginär, wenn p negativ ist, die Gleichung hat dann keine geometrische Bedeutung. Eine solche Gleichung ist $(y + x)^2 - 2y - 2x + 2 = o$. — Kurz die Gleichung $(y+x)^2 - 2y - 2x + 1 = k$ gibt $y = -x + 1 \pm \sqrt{k}$. Man nimmt $AB = AN = 1$ und zieht BN, hierauf macht man $BD = BD' = \sqrt{k}$. Je kleiner nun k wird, desto mehr nähern sich die Parallelen dem Diameter BN, mit welchen sie endlich zusammenfallen, wenn $k = o$. Die Gleichung stellt Nichts mehr dar, wenn k negativ ist.

4) Welchen Punkt G man auch auf BN (Fig. 90) wählen mag, so liegt derselbe in der Mitte des Stücks IM einer beliebigen Geraden; BN ist mithin der Ort einer unendlichen Anzahl von Mittelpunkten.

Sind m und n zugleich Null, so läßt sich die vorgelegte Gleichung auf die Form $(y - \alpha x - \beta)^2 - p = o$ bringen.

1) Die letzte Gleichung ist das Produkt aus $y - \alpha x - \beta + \sqrt{p}$ mit $y - \alpha x - \beta - \sqrt{p}$, wenn p positiv ist; x hat einerlei Coefficient, man leistet ihr folglich Genüge, wenn man einen Factor unabhängig vom andern gleich Null setzt.

2) Unsere Gleichung bildet das Quadrat von $y - \alpha x - \beta$, wenn p Null ist, indem dann die in Rede stehenden Factoren einander gleich werden.

3) Ist endlich p negativ, so will man die Summe von zwei positiven Größen Null machen, wovon die eine $+p$ nicht Null sein kann, was eine Ungereimtheit mit sich bringt. Es werden diese Thatsachen einiges Licht über die Existenz unserer drei besondern Fälle werfen.

§. 149. Aus dieser ganzen Untersuchung ergibt sich als Endresultat:

I. Im Fall, daß m oder $B^2 - 4AC$ negativ ist, übertrifft $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ ein vollständiges Quadrat und C muß positiv sein; die Curve ist alsdann geschlossen, sie ist eine Ellipse, oder ein Kreis, oder ein Punkt, oder Nichts.

II. Im Fall, daß m oder $B^2 - 4AC$ positiv ist, macht $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ weniger als ein vollständiges Quadrat aus; die Curve besteht dann aus zwei unbegrenzten Theilen; sie ist eine Hyperbel, oder ein System von zwei sich schneidenden Geraden. Es ereignet sich dies, wann C negativ ist, oder das Glied in x^2 oder y^2 fehlt, dabei aber das in xy bleibt.

III. Im Fall, daß m oder $B^2 - 4AC = o$ ist, bildet $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ ein vollständiges Quadrat; die Curve erstreckt sich nur nach einer Seite hin ins Unendliche, sie ist eine Parabel, eine Gerade, oder ein System von zwei Parallelen, oder Nichts. Es hat dies statt, wenn das Glied in xy und dabei eins der Quadrate x^2 oder y^2 fehlt.

§. 150. Man kann übrigens ganz nach Belieben eine Gleichung vom zweiten Grad bilden, und sie einem oder dem andern unserer verschiedenen Fälle anpassen. Zu diesem Zweck ist es ausreichend, die Gleichung (1) in Paragraphen 142 vorzunehmen, und daselbst die Constanten α, β, m..... nach Willkühr zu bestimmen, indem man dabei Sorge trägt, den Wurzelausdruck dergestalt zusammenzusetzen, daß er den verlangten Bedingungen genüge. Für eine Ellipse wird also m negativ sein und $mx^2 + nx + p = o$ reelle Wurzeln haben, während für eine Hyperbel m positiv ist und vorige Gleichung reelle oder imaginäre Wurzeln hat, je nachdem diese Curve ihren Diameter schneiden oder nicht schneiden soll. Man kann endlich auch Bedingungen vorschreiben, welche sämmtliche Constanten α, β.... bestimmen. Hier steht ein Beispiel einer solchen Rechnung:

Die eine Hyperbel (Fig. 88) hat ihren Ursprung C im Mittelpunkt, der Diameter BN macht mit der Achse der x einen Winkel von 45°, CE = 1 gibt GH als Tangente und Grenze der Curve, der conjugirte Diameter CO ist endlich $\sqrt{2}$; man soll hieraus die Gleichung dieser Hyperbel finden. Die gesuchte Gleichung ist offenbar $y = x \pm \sqrt{m(x^2 - 1)}$, und es bleibt m zu bestimmen übrig; $x = o$ macht aber den Wurzelausdruck imaginär, welcher $\sqrt{2}$ werden soll, wenn man — mit + vertauscht; folglich $\sqrt{m} = \sqrt{2}$ und die verlangte Gleichung ist $y^2 - 2xy - x^2 = -2$.

Wünscht man, daß die Gleichung einen Punkt, eine oder zwei Geraden, oder Nichts ausdrücke, so kann man auf eine ähnliche Art verfahren; einfacher ist es aber, dabei zu Werke zu gehen, wie folgt:

L und M seien von der Form $ky + lx + g$, man hat

1) Für einen Punkt, $L^2 + M^2 = o$.

2) Für eine Gerade, $L^2 = o$.

3) Für zwei Geraden, $LM = o$; sollen diese zwei Linien parallel sein, so ist das Verhältniß der Constanten k und l in L und M einerlei.

4) Damit die Gleichung keine geometrische Bedeutung habe, muß N eine beliebige positive Zahl in $L^2 + M^2 + N = o$ sein.

§. 151. Nachdem die Gleichung (1) diskutirt worden, wobei die Coordinaten rechtwinklig angenommen waren, kann man sich auch vorsetzen, dieselbe genau zu construiren, ohne die im §. 126 entwickelte Theorie dabei zu benutzen, indem man nämlich die Curve auf ein Diametersystem bezieht. Es gelte deshalb als Achse der x′ eine zu dem Diameter $y = \alpha x + \beta$ parallel geführte Gerade, der Ursprung und die Achse der y bleiben ungeändert. Da $\tang(xx') = \alpha$, so ist $\cos(xx') = \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} = k$, $\sin(xx') = \alpha k$, $(xy') = 90^0$; daraus entstehen die Transformationsformeln $x = kx'$, $y = \alpha kx' + y'$, was uns die umgeformte Gleichung $y' = \beta \pm \sqrt{(mk^2x'^2 + nkx' + p)}$ gibt.

1) Wir verlegen den Ursprung in den Mittelpunkt, im Fall die Curve einen solchen besitzt. Die auf ein conjugirtes Diametersystem bezogene Gleichung wird die Form $y = \sqrt{(Q + Cx^2)}$ erhalten (§. 114). Es reicht folglich hin, die Glieder β und nkx' zum Verschwinden zu bringen. Wir setzen zu diesem Behuf $y' = y'' + \beta$, $x' = x'' - \frac{n}{2km}$, wobei die zweiten Glieder die Coordinaten x, y′ des Mittelpunktes sind. Wir finden hiernach $y''^2 - mk^2 x''^2 = p - \frac{n^2}{4m}$ für die Gleichung unserer Curve, bezogen auf ein conjugirtes Diametersystem. Es ist jetzt sehr leicht, die Curve zu construiren (§. 118).

In der Gleichung $y = x + 1 \pm \sqrt{(-2x^2 + 6x - 4)}$ ist $\alpha = 1$, $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $m = -2 \ldots$, und man findet die umgeformte $y''^2 = x''^2 + \frac{1}{2}$. Nachdem man also den Diameter BN (Fig. 81), dessen Gleichung $y = x + 1$ ist, und den Ursprung in den Mittelpunkt C verlegt hat, bleibt es noch übrig, eine Ellipse zu beschreiben, deren halbe conjugirte Diameter CO, $CD = \sqrt{\frac{1}{2}}$ sind.

2) Im Fall die Curve kein Centrum hat, ist $m = o$, und der Wurzelausdruck reducirt sich auf $\sqrt{(nkx' + p)}$. Wir entfernen die constanten Glieder β und p dadurch, daß wir den Ursprung in den

Durchschnittspunkt der Curve mit ihrem Diameter verlegen, was gibt $y''^2 = nkx''$, wenn man $y' = y'' + \beta$ und $x' = x'' - \frac{p}{nk}$ setzt. Man zieht also den Diameter $y = \alpha x + \beta$, nimmt seinen Durchschnittspunkt mit der Parabel als Ursprung, wählt den Diameter zur Achse der x'' und nimmt die der y'' zu der frühern Achse der y parallel; die Curve läßt sich hernach leicht construiren (§. 135).

In der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{(2x-4)}$ hat man $\alpha = \frac{1}{2}$, $k = \sqrt{\frac{4}{5}}$. Für die Coordinatenachsen DN und DF (Fig. 71) erhält man die Gleichung $y''^2 = 4x''\sqrt{\frac{1}{5}}$, welche der Parabel MDM′ angehört. Man hat hier, wie in §. 149, $AB = 1$, $AE = DE = 2$.

Fünftes Kapitel.

Analytisch-geometrische Aufgaben.

Ueber die Entstehung der Curven.

§. 152. I. Die Curve zu finden, welche aus den verschiedenen Durchschnittspunkten M zweier um die gegebenen Punkte A und B sich drehender und stets einen rechten Winkel einschließender Geraden AM, BM (Fig. 91) entsteht. Es seien AM, MB eine von den Lagen unserer Erzeugungslinien. Nimmt man die Mitte C von AB zum Ursprung und setzt $AC = r$; so sind die Gleichungen der Linien AM und BM, von denen die erste durch $A(-r, o)$ und die zweite durch $B(r, o)$ geht, beziehungsweise $y = a(x + r)$ und $y = a'(x - r) \ldots (1)$. Man hat ferner $aa' + 1 = o \ldots (2)$, weil diese Geraden auf einander senkrecht sein sollen. Die Werthe a und a', welche der letzten Bedingung nicht Genüge leisten, entsprechen den Geraden AN und BN, die keine Erzeugungslinien sind. Setzt man $-\frac{1}{a}$ für a', so beziehen sich die Gleichungen (1), welche sämmtlichen durch A und B gehenden Geraden angehören, auf zwei Erzeugungslinien, deren Richtungen durch den beliebigen Werth von a bedingt sind; das gleichzeitige

Zusammenbestehen dieser Gleichungen macht, daß x und y die Coordinaten CP, PM des Durchschnittspunktes dieser Geraden sind. Durch die Elimination von a aus gedachten Gleichungen ergeben sich x und y sofort als Coordinaten des Durchschnittspunktes zweier beliebigen Erzeugungslinien, indem solche nur durch a von einander unterschieden sind, das in dem Resultat nicht mehr zum Vorschein kommt.

Die Elimination von a′ und a aus den Gleichungen (1) und (2) liefert uns also die Gleichung der gesuchten Curve. Die Werthe $a = \frac{y}{x+r}$ und $a' = \frac{y}{x-r}$ ändern die Gleichung (2) in $y^2 + x^2 = r^2$ um, welches die Gleichung eines Kreises ist, der AB=2r zum Diameter hat.

II. Sollen die zwei Erzeugungslinien AM, BM (Fig. 92) einen gegebenen Winkel AMB einschließen, dessen trigonometrische Tangente t wäre, so würde man die Gleichung (2) durch $t = \frac{a'-a}{1+aa'}$ ersetzen. Es käme dann $(x^2+y^2-r^2)\,t = 2ry$. Aus der Diskussion dieser Gleichung, wo AC = CB = r ist, ergibt sich, daß die gesuchte Curve ein Kreis ist, für welchen der Halbmesser OB den Werth $\sqrt{\left(r^2 + \frac{r^2}{t^2}\right)}$ hat, und $CO = \frac{r}{t}$ den Mittelpunkt bestimmt.

Im Allgemeinen, anstatt eine Curve durch einen Punkt, der sich einer bestimmten Vorschrift gemäß fortbewegt, entstanden anzunehmen, kann man sie sich auch durch den fortwährenden Durchschnitt zweier gegebenen Linien, geraden oder krummen, die hinsichtlich ihrer Lagen oder Form aber veränderlich sind, erzeugt denken. Man betrachtet sofort diese Erzeugungslinien in eine ihrer erforderlichen Lagen, wodurch man ihre Gleichungen, wie M = o und N = o erhält. Die Veränderung, welche nun die beiden gedachten Linien erfahren, hängt von der in jenen Gleichungen vorkommenden zwei Constanten ab, die jedoch rücksichtlich dieser ihrer Aenderung einer bestimmten Bedingung P = o unterworfen sind. Die Wiederholung der obigen Schlußweise zeigt, daß durch Elimination dieser beiden Constanten aus unsern drei Gleichungen der analytische Ausdruck der erzeugten Curve gewonnen wird.

Wären drei veränderliche Constanten vorhanden, so müßte man, ausser P = o, noch eine andere Bedingungsgleichung Q = o haben, worauf man diese drei Constanten aus den vier Gleichungen M = o,

$N = o$, $P = o$, $Q = o$ zu eliminiren hätte. Und dies sofort in der Art, daß man immer eine Gleichung mehr hat, als zu eliminirende Größen vorhanden sind.

Hätte man weniger Gleichungen, als solcher erforderlich sind, so würde die Finalgleichung noch die der gesuchten Curve sein, mit dem Unterschiede, daß ein oder mehrere veränderliche Parameter daselbst vorkämen. Die Aufgabe würde in solchem Falle sich unbestimmt herausstellen, und derselben eine Reihe von Curven genügen. Sind eben so viel Gleichungen als Constanten vorhanden, so hat man eine bestimmte Anzahl von Werthe für x und y, d. h. man hat blos mehrere verschiedene Punkte. Bei einer noch größern Anzahl von Gleichungen ist die Aufgabe ungereimt. Alles dies wird durch Beispiele erläutert werden.

III. Zwei Geraden DN, Dx (Fig. 93) und ein fester Punkt A auf einer derselben sind gegeben; man soll die Gleichung der Curve finden, in welcher der Abstand MA irgend eines Punktes M von jenem festen Punkt A der entsprechenden Ordinate PN der zweiten Linie DN gleich ist. Wir denken uns zu diesem Behuf die fragliche Curve aus dem fortwährenden Durchschnitt einer beweglichen, die Gerade Dx unter einem rechten Winkel schneidenden Linie PN und eines veränderlichen Kreises KL, dessen Mittelpunkt in dem festen Punkt A liegt, in der Art entstanden, daß die gegebene Bedingung $AM = PN$ immer erfüllt werde. Es sei der Ursprung in A, ferner $AM = \alpha$, $AP = \beta$, $AD = p$; $t = \text{tang } NDA$. Die Gleichungen des Kreises LK und der Geraden PN sind beziehungsweise: $x^2 + y^2 = \alpha^2$, $x = \beta \ldots (2)$. Die Gleichung der durch D $(-p, o)$ gehenden Geraden ist $y = t(x + p)$, wodurch die Bedingung der Aufgabe $MA = NP$ in $\alpha = t(\beta + p)$ übergeht. Mit dem Kreise und der Geraden ändern sich blos die Größen α und β; wir müssen sie daher mit Hülfe der Gleichungen (1) eliminiren, was uns gibt $y^2 + x^2(1 - t^2) - 2t^2px - t^2p^2 = o$.

1) Ist $t = 1$, d. h. der gegebene Winkel $E'DA = 45^0$; so wird unsere Gleichung $y^2 = 2px + p^2$, die einer Parabel E'S angehört, bei welcher der Ursprung im Brennpunkt A, der Scheitel in S und $2AS = AE' = p$ ist.

2) Ist $t < 1$, d. h. der Winkel $NDA < 45^0$, so erhält man eine Ellipse, für welche der Mittelpunkt C und die Achsen a und b durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$AC = \frac{pt^2}{1-t^2},\ a = \frac{pt}{1-t^2},\ b = \frac{pt}{\sqrt{(1-t^2)}}.$$

Läuft DN zu DA parallel, so hat man einen Kreis; was auch daraus hervorgeht, daß hier bei der Erzeugung PN constant ist.

3) Wenn endlich $t > 1$ oder EDA in IDA übergegangen, $> 45^0$ ist, so erhält man eine Hyperbel.

Diese Eigenschaft könnte ein leichtes Mittel abgeben, unsere drei Curven zu beschreiben, welche sämmtlich die gegebene Gerade DE, DE′, oder DI in dem Durchschnitte derselben mit der Linie AE (§. 111) berühren.

Anmerkung. Ist der Winkel IDA ein rechter, so erhält man wegen $t = \infty$ die Gleichung $x = -p$, d. h. die Gerade DI′ selbst.

IV. Die Gerade AB von gegebener Länge (Fig. 94) bewegt sich in dem beliebigen Winkel BCA dergestalt, daß ihre Endpunkte B und A stets auf den Schenkeln dieses Winkels bleiben; man soll die Curve finden, welche ein bestimmter Punkt M der ersten Linie AB während dieser Bewegung beschreibt. Wir nehmen die festen Geraden AC, CB zu Coordinatenachsen, bezeichnen die unveränderlichen Abstände MA und MB durch b und a, und den Cosinus des Winkels ACB durch c. Unsere Curve kann aus dem fortwährenden Durchschnitt zweier beweglichen Geraden AB, PM, deren Gleichungen $y = \alpha x + \beta$ und $x = \gamma$ sind, entstanden betrachtet werden, woraus sofort $PM = \alpha\gamma + \beta$ und $CP = \gamma$. Es handelt sich jetzt darum, die Bedingungsgleichung zwischen α, β, γ aufzusuchen. Nun gibt das Dreieck PMB, wenn man $PB = z$ setzt, $a^2 = z^2 + PM^2 - 2cz \cdot PM$; die Parallelen AC, PM geben überdies $bz = a \times CP$; folglich

$$bz = a\gamma,\ a^2 = z^2 + (\alpha\gamma + \beta)^2 - 2cz\,(\alpha\gamma + \beta).$$

Es bleibt uns jetzt die Größen, z, α, β und γ zu climiniren übrig. Wir setzen deshalb y anstatt $\alpha\gamma + \beta$, wodurch wir erhalten: $bz = ax$ und $a^2 = z^2 + y^2 - 2cyz$. Schaffen wir endlich z fort, so kommt $a^2b^2 = b^2y^2 + a^2x^2 - 2abcxy$ für die verlangte Gleichung, die einer Ellipse angehört, deren Mittelpunkt in C liegt (§. 143).

Ist der Winkel ACB ein rechter, so wird die ganze Rechnung viel einfacher, und man hat die Gleichung der auf ihre Achsen 2a und 2b bezogenen Ellipse. Hieraus ergibt sich ein neues Mittel, die Ellipse zu verzeichnen. Nachdem man nämlich zwei unbestimmte, unter

einem rechten Winkel sich schneidende Linien Cy, Cx gezogen hat, nimmt man auf einem Lineal M′B die Stücke AM, MB den halben Achsen b, a beziehungsweise gleich, legt alsdann gedachtes Lineal auf den Winkel yCx dergestalt, daß sich die Punkte A und B auf den Schenkeln dieses Winkels befinden. In dieser Lage und allen andern von der nämlichen Art wird der Punkt M ein Punkt der Ellipse sein. Die auf solche Weise bestimmten Punkte durch einen Zug mit einander verbunden, stellen unsere Curve dar.

Liegt der beschreibende Punkt in M′ auf der Verlängerung von AB, so führt dieselbe Rechnung zu dem nämlichen Resultat, mit dem Unterschied, daß das Glied 2bacxy das Zeichen + erhält. Man nimmt alsdann BM′ = a, AM′ = b; AB macht die Differenz der halben Achsen, während es im vorigen Fall die Summe derselben ist; die Construction bleibt übrigens ganz die nämliche.

Anmerkung. Ist c = o und ausserdem M der Halbirungspunkt von AB, so ist der Ort der Punkte M ein Kreis.

V. Aus dem Brennpunkt F′ einer Ellipse wird eine Senkrechte auf jede Tangente errichtet; man soll die Gleichung der Curve finden, welche durch die Durchschnittspunkte I sämmtlicher Tangenten und ihrer entsprechenden Senkrechten geht. Die Gleichung der Tangente im Punkt (x', y') ist $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$; ferner ist $y = \beta(x + \alpha)$, die Gleichung der durch den Brennpunkt $(-\alpha, o)$ gehenden Geraden. Sollen diese beiden Linien senkrecht zu einander stehen, so hat man die Relation $b^2x'\beta - a^2y' = o$. Die Gleichungen der Erzeugungslinien sind folglich $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$ und $b^2x'y = a^2y'(x+\alpha)$. Es ändern dieselben ihre Lage, wenn der Berührungspunkt (x', y') ein anderer wird; damit derselbe auf der Ellipse liege, besteht die Gleichung $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$. Aus den drei letzten Gleichungen bleibt uns x' und y' noch zu eliminiren übrig. Man sucht deshalb aus den beiden ersten die Werthe von x' und y' und substituirt solche in die dritte; dadurch findet man $b^2y^2 + a^2(x + \alpha)^2 = [y^2 + x(x + \alpha)]^2$, oder wenn man entwickelt: $y^4 + y^2[2x(x+\alpha) - b^2] + (x+\alpha)^2(x^2 - a^2) = 0$. Erwägt man, daß $-b^2 = \alpha^2 - a^2$ (§. 68), so geht das zweite Glied in $y^2[(x+\alpha)^2 + x^2 - a^2]$ über, und man erhält, wenn man die mit $x^2 - a^2$ behafteten Glieder vereinigt: $(y^2 + x^2 - a^2)[y^2 + (x+\alpha)^2] = o$. Der zweite Factor ist der Aufgabe offenbar fremd, weil er dem Brennpunkte entspricht. Der andere dagegen gehört dem der Ellipse um-

schriebenen Kreise an, welches demnach die gesuchte Curve ist. Sehr leicht ergeben sich folgende Resultate:

1) Da b nicht mehr vorkommt, so erfüllt der der Hyperbel eingeschriebene Kreis die vorgelegte Aufgabe für diese Curve (§. 80).

2) Unser Kreis ist sämmtlichen über der großen Achse beschriebenen Ellipsen, sogar dem Kreise, der so sich selbst wiedererzeugt, gemeinsam.

3) Da $y^2 + x^2 = a^2$ von α unabhängig ist, so findet man den nämlichen Kreis, man mag von dem einen oder dem andern Brennpunkt aus operiren.

VI. Um dasselbe Problem für die Parabel aufzulösen, muß man, wie man leicht übersieht, x' und y' aus den drei Gleichungen $yy' = p(x+x')$, $py = -y'(x-\frac{1}{2}p)$ und $y'^2 = 2px'$ eliminiren. Es kommt auf solche Weise $o = (-2xy^2 + 2x^2 - px)(p-2x)$, oder wenn man reducirt, $x[4y^2 + (2x-p)^2] = o$. Der zweite Factor, welcher dem Brennpunkte angehört, wird weggelassen. Der erstere $x = o$ gibt die Achse der y für den Ort der Fußpunkte der Perpendikel.

VII. Den geometrischen Ort derjenigen Punkte M zu finden, von welchen aus je zwei an eine gegebene Parabel NAK (Fig. 95) gezogenen Tangenten NM und KM stets einen bestimmten Winkel M einschließen. Die an die Parabel durch die Punkte (x', y'), (x'', y'') gezogenen Tangenten haben zu Gleichungen, $yy' = p(x+x')$, $yy'' = p(x+x'')$ (§. 89).

Ferner wird die Tangente t des Winkels KMN, welchen diese Geraden mit einander bilden, durch $t = \frac{p(y''-y')}{y'y''+p^2}$ bestimmt. Für die verschiedenen Berührungspunkte K und N soll dieser Winkel derselbe bleiben; t ist mithin constant, x', y', x'', y'' aber veränderlich. Wir müssen daher zur Elimination der vier letztern Größen schreiten, zu welchem Behuf wir, ausser den drei obigen Gleichungen, noch $y'^2 = 2px'$ und $y''^2 = 2px''$ benutzen. Die aus diesen letztern Gleichungen für x' und x'' erhaltenen Werthe verwandeln die zwei ersten in

$$y'^2 - 2yy' + 2px = o \text{ und } y''^2 - 2yy'' + 2px = o.$$

Der Anblick dieser Gleichungen zeigt sofort, daß die eine Wurzel derselben y', die andere y'' ist; folglich $y'y'' = 2px$, woraus $t = \frac{y''-y'}{2x+p}$.

Ueberdies folgt aus $y' = y \pm \sqrt{(y^2 - 2px)}$ offenbar $y'' - y' = 2\sqrt{(y^2-2px)}$. Es ergibt sich hiernach als verlangte Gleichung

$$y^2 - t^2x^2 - px(2+t^2) - \tfrac{1}{4}t^2p^2 = o,$$

welche einer Hyperbel angehört. Da nur das Quadrat von t vorkommt, so wird der eine Zweig durch den Scheitel M' des stumpfen Winkels $K'M'N$ und der andere durch den Scheitel M seines Supplementwinkels NMK erzeugt.

Ist der gegebene Winkel M ein Rechter, oder $t = \infty$, so hat man $2x + p = o$: die von den verschiedenen Punkten der Richtungslinie an die Parabel gezogenen Tangentenpaare schneiden sich also immer unter rechten Winkeln.

Anm. Um die Achsengleichung unsrer Hyperbel zu erhalten, setzen wir $x = x' + \frac{p}{2} + \frac{p}{t^2}$ in der oben gefundenen Gleichung $y^2 - t^2x^2 - px(2+t^2) - \frac{1}{4}t^2p^2 = o$; wodurch entsteht $t^2y^2 - t^4x^2 = -p^2(1+t^2)$. Hiernach haben die Abscisse AC des Mittelpunkts und die halben Achsen a und b die Werthe:

$$AC = \frac{p}{2} + \frac{p}{t^2},\ a = \frac{p}{t^2}\sqrt{(1+t^2)} \text{ und } b = \frac{p}{t}\sqrt{(1+t^2)}.$$

VIII. Es ereignet sich öfters, daß die Gleichung einer Curve sich von selbst darbietet, oder daß sie in der Definition fast eher als durch ihre Erzeugung ausgedrückt ist. Die Sache verdient kaum, daß wir uns dabei aufhalten. Folgendes Beispiel wird hinreichend sein.

Die Curve von solcher Beschaffenheit zu finden, daß jede ihrer Ordinaten die mittlere Proportionale zwischen den derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten zweier gegebenen Geraden sei. Es ist klar, daß wenn $y = ax + b$ und $y = a'x + b'$ die Gleichungen der gegebenen Geraden sind, die den Curven $y^2 = (ax + b)(a'x + b')$, oder $y^2 - aa'x^2 - x(a'b + ab') = bb'$ sein wird.

1) Ist eine der Geraden, z. B. die zweite zur Achse der x parallel, mithin $a' = o$, so entsteht $y^2 = ab'x + bb'$, welche Gleichung eine Parabel darstellt, die man leicht construiren kann. Ist ausserdem $a = o$, so gibt $y^2 = bb'$ zwei parallele Geraden, eine Gerade oder Nichts, je nachdem die Größen und Zeichen von b und b' beschaffen sind. Wird auf das Zeichen der Ordinaten der Geraden keine Rücksicht genommen, so findet man, ausser unserer Parabel, noch eine zweite, die der erstern gleich und entgegengesetzt ist und mit ihr einerlei Scheitel hat.

2) Haben a und a' verschiedene Zeichen, so erhält man eine Ellipse. Für den Fall, daß $aa' = -1$ sind die gegebenen Linien auf

einander senkrecht, und unsere Curve ist ein Kreis. — Man bekommt auch einen Punkt oder Nichts.

3) Haben a und a′ einerlei Zeichen, so findet man eine Hyperbel. Für den Fall, daß $a = a'$, läuft eine der Asymptoten zu den gegebenen Geraden parallel, worauf die andere sich leicht bestimmen läßt (§. 147). Man kann auch zwei einander schneidende Gerade bekommen. Nimmt man in den beiden letzten Fällen die Zeichen der Ordinaten nicht in Betracht, so erhält man auf einmal die über den nämlichen Achsen beschriebenen Ellipse und Hyperbel, wie Fig. 70 zeigt.

§. 153. Man könnte dergleichen Probleme noch sehr vervielfältigen. Beispiele dieser Art finden sich in den schon früher angeführten Sammlungen von Aufgaben aus der analytischen Geometrie von Puissant und Magnus. Zur Uebung wollen wir noch folgende hersetzen:

IX. Zwei Winkel von 45°, BAC, BDC (Fig. 96) sind der Lage nach gegeben; man dreht sie um ihre festen Scheiteln A und D dergestalt, daß zwei Schenkel AB, BD sich stets auf der zu AD parallelen Linie BE schneiden. Man soll den Ort des Durchschnittspunktes der beiden andern Schenkel AC, DC finden. Man kann die beweglichen Winkel, so wie die Gerade BE auch beliebig wählen.

X. Den Ort des Punktes M (Fig. 97) zu finden, für welchen die Abstände AM, BM von zwei festen Punkten A und B in einem gegebenen Verhältniß zu einander stehen. An welcher Stelle der Curve wird AM dieselbe berühren? Wie wird der Punkt M bestimmt, dessen Abstände MA, MB, MD von drei festen Punkten A, B und D in bekannten Verhältnissen zu einander sind?

XI. Ein Kreis und eine Gerade sind gegeben; den geometrischen Ort der Mittelpunkte sämmtlicher Kreise zu finden, welche gleichzeitig beide Linien berühren.

XII. Zwei Kreise sind der Lage und Größe nach gegeben; man soll den geometrischen Ort sämmtlicher Kreise finden, welche die gegebenen Kreise zugleich berühren.

XIII. Die Schenkel eines rechten Winkels gleiten auf einer Ellipse hin, indem sie dieselbe in allen Lagen berühren; es soll der geometrische Ort der Scheitelpunkte gefunden werden. Man kann auch den Winkel beliebig wählen.

XIV. Den Ort der Scheitel derjenigen Dreiecke zu finden, welche eine gegebene Basis haben und in welchen die Differenz der Winkel an derselben constant ist.

Aufgaben, welche den zweiten Grad übersteigen.

§. 154. Wir haben im §. 12 gesehen, wie die Wurzeln der Gleichungen vom zweiten Grade vermittelst der Kreislinie und der Geraden construirt werden können. Das folgende Beispiel zeigt, was zu thun ist, wenn man bei der Auflösung einer bestimmten Aufgabe auf eine Gleichung geführt wird, in welcher die Unbekannte auf einem höhern Grade als dem zweiten vorkommt.

Es sei die Gleichung $x^4 - pqx^2 + p^2rx + p^2m^2 = o$. Setzt man $x^2 = py$, so erhält man $y^2 - qy + rx + m^2 = o$. Es ist leicht einzusehen, daß die vorgelegte Gleichung als das Resultat der Elimination von y aus den beiden letztern Gleichungen betrachtet werden kann. Construirt man die Kegelschnitte, welche durch diese Gleichungen dargestellt werden und im vorliegenden Falle zwei Parabeln bedeuten, so sind die Abscissen ihrer Durchschnittspunkte die gesuchten Wurzeln. Die vorgelegte Gleichung wird ihre vier Wurzeln reell haben, wenn sich die zwei Curven in vier Punkten schneiden; dagegen wird es blos zwei Durchschnittspunkte geben, wenn nur zwei reelle Wurzeln existiren, und endlich gar kein Durchschnitt statt finden, wenn lauter imaginäre Wurzeln vorhanden sind. Im Falle, daß es einige gleiche Wurzeln gibt, werden sich die zwei Curven berühren. — Da nun eine der zwei Curven willkührlich ist, so ist es stets angemessen, den am leichtesten zu construirenden Kreis dabei zu wählen. Nachdem die zwei rechtwinkligen Achsen Ax, Ay (Fig. 98) gezogen worden, wird die Hyperbel, deren Gleichung in Bezug auf die Asymptoten $xy = pm$ ist, construirt. Durch Elimination von pm geht dann die vorgelegte Gleichung in folgende $x^2 + y^2 + \frac{pry}{m} = pq$ über, welche einem Kreise entspricht. Um denselben zu verzeichnen, nimmt man $AC = \frac{pr}{2m}$ und beschreibt aus C als Mittelpunkt mit dem Radius $\sqrt{\left(pq + \frac{p^2r^2}{4m^2}\right)}$ einen Kreis. Die Abscissen AP, AP′, AQ, AQ′ der Punkte M, M′, N, N′, in denen dieser Kreis der Hyperbel begegnet, werden die gesuchten vier Wurzeln sein, wovon in der Figur zwei positiv, die andern zwei negativ sind. Es kann unter gewissen Umständen auch kein Durchschnittspunkt geben, oder blos zwei.

Hat man zweitens die Gleichung $x^4 - p^2x^2 + p^2qx + p^3r = o$, so

setzt man $x^2 = py$, wodurch entsteht $y^2 - py + qx + pr = o$. Durch die Addition von $x^2 - py = 0$ erhalten wir $y^2 + x^2 - 2py + qx + pr = o$ und $x^2 = py$, welche Gleichungen, wie man leicht sieht, einem Kreise und einer Parabel angehören.

Ist ferner die Gleichung $x^3 \pm a^2x - a^2q = o$ gegeben, so multiplicirt man mit x und setzt $x^2 = ay$; dadurch entsteht $y^2 \pm ay - qx = o$. Wenn man zu dieser Gleichung die vorige addirt, kommt $x^2 + y^2 = qx$ oder $y^2 + x^2 = 2ay + qx$, je nachdem die vorgelegte $+ a^2$ oder $- a^2$ enthält. Man construirt den durch diese Gleichung dargestellten Kreis; die Abscissen seiner Durchschnittspunkte mit der Parabel $x^2 = ay$ sind die gesuchten Wurzeln. Die Wurzel $x = o$ rührt von dem eingeführten Factor her.

Es sei endlich die Gleichung $x^3 - 3a^2x = 2a^3$. Die nämliche Rechnung gibt $x^2 = ay$, $y^2 + x^2 = 4ay + 2ax$. Man construire die Parabel MA (Fig. 99), welche die Größe a zum Parameter hat, und den Kreis, für welchen die Coordinaten des Mittelpunktes C und der Halbmesser AC die Werthe haben: a, 2a und $a\sqrt{5}$. Der Durchschnittspunkt M hat $x = AP$ zur Abscisse; es ist dies die einzige reelle Wurzel. Man kann mittelst dieser Construction den Werth von $\sqrt[3]{a}$ finden.

§. 155. Zwischen zwei gegebenen Linien a und b zwei mittlere Proportionallinien zu finden. Der Bedingung zu Folge ist $x = {}^2ay$ und $y^2 = bx$. Construirt man demnach zwei Parabeln, die a und b zu Parametern und den Ursprung zum gemeinschaftlichen Scheitel haben und deren Achsen beziehungsweise mit den Coordinatenachsen zusammenfallen; so erhält man in der Abscisse x und der Ordinate y ihres gemeinschaftlichen Punktes die gesuchten Linien.

Die Construction gestaltet sich jedoch einfacher, wenn man den Kreis statt einer der zwei Parabeln anwendet. Durch Addition unserer beiden Gleichungen entsteht nämlich $x^2 + y^2 - ay - bx = o$, was uns auf die Figur 99 zurückführt, wo $BC = \frac{1}{2}a$, $AB = \frac{1}{2}b$.

Ist $b = 2a$, so hat man $x^3 = 2a^3$; was uns die Auflösung des berühmten Problems von der Verdopplung des Würfels liefert. Macht man $b = \frac{m}{n}a$, so erhält man $x^3 = \frac{m}{n}a^3$; wonach sich ein Würfel x^3 bilden läßt, der zu einem gegebenen Würfel a^3 in dem Verhältniß von $m : n$ steht.

Ueberhaupt können dergleichen Constructionen auf gar mancherlei

Art bewerkstelligt werden: denn weil sie von zwei Curven, deren Gleichungen bekannt sind, abhängen, kann man die letztern mit willkührlichen constanten Größen multipliciren und sie addiren u. s. w., wodurch sich verschiedene Curven herausstellen, die zur Auflösung des Problems geeignet sind.

Anmerkung. Wie aus dem Obigen ersichtlich ist, können die Gleichungen vom dritten und vierten Grade durch den Durchschnitt zweier Kegelschnitte gefunden und geometrisch dargestellt werden. Um noch höhere Gleichungen zu construiren, mußte man die Curven der höhern Grade benutzen.

§. 156. Es kann sich ereignen, daß eine vorgelegte Aufgabe, die als bestimmt betrachtet wird, es jedoch nicht ist (siehe §. 58, II.), oder daß, wenn sie es ist, ihre Auflösung dadurch erleichtert wird, indem man solche von einer andern und zwar unbestimmten Aufgabe abhängig macht. Die Rechnung gibt von selbst dergleichen Modificationen zu erkennen, wie wir es an folgenden Beispielen sehen werden:

1. Zwei Punkte A und B sind gegeben; man soll einen dritten Punkt M (Fig. 100) dergestalt finden, daß wenn AM und MB gezogen werden, der Winkel MAB die Hälfte von MBA mache. Man setze $AB = m$ und nehme den Ursprung in A an; die Gleichungen der Linien MA, MB sind alsdann $y = ax$, $y = -a'(x-m)$. Da eine der Tangenten a ist und a' einen Winkel, der das Doppelte vom andern beträgt, angehört, so hat man $a' = \frac{2a}{1-a^2}$. Die Elimination von a und a' aus diesen drei Gleichungen gibt, wenn wir $y = o$ nicht berücksichtigen, weil es nichts kennen lehrt: $y^2 - 3x^2 + 2mx = o$.

Man sieht, daß die Aufgabe unbestimmt ist und ihr jeder Punkt einer Hyperbel genüge, welche wir jetzt construiren wollen. Wir nehmen deshalb $AC = CD = \frac{1}{3}m = \frac{1}{3}AB$, was uns den Mittelpunkt C und die Scheitel A und D gibt; die Asymptoten CG, CH bilden mit AB einen Winkel, der $\frac{2}{3}$ von einem Rechten macht, weil $\sqrt{3}$ seine trigonometrische Tangente ist; MD stellt mithin die in Frage stehende Curve dar.

Will man einen Kreisbogen AEB oder einen Winkel AKB in drei gleiche Theile theilen, so nimmt man AC gleich dem dritten Theil seiner Sehne AB und construirt hierauf die Hyperbel wie oben; ihr Durchschnitt mit dem Bogen bestimmt das Drittel EB des Bogens

oder das Drittel EKB des Winkels AKB. (S. Geometrie §. 60, X.) — Um das Problem von der Dreitheilung des Winkels aufzulösen, haben wir es zuvörderst unter einer unbestimmten, selbst unter einer allgemeinen Form dargestellt, weil wir ebenso den Punkt eines elliptischen Bogens oder irgend einer andern Curve, der eine analoge Bedingung erfüllt, hätten finden können.

II. Man soll eine Gerade DD′ (Fig. 101), $y = ax + b$, dergestalt ziehen, daß die Summe der aus zwei gegebenen Punkten M und M′ auf jene Gerade gefällten Senkrechten eine bekannte Länge m betrage. Es handelt sich darum, die Größen a und b der Bedingung gemäß $MD + M'D' = m$ zu bestimmen. Die Entfernungen der Punkte $M(x', y')$ und $M(x'', y'')$ von der gesuchten Linie sind beziehungsweise $\frac{ax'-y'+b}{\sqrt{(1+a^2)}}$ und $\frac{ax''-y''+b}{\sqrt{(1+a^2)}}$, wornach die Gleichung $(ax'-y'+b) + (ax''-y''+b) = m\sqrt{(1+a^2)} \ldots (1)$. Da diese Gleichung nur a oder b kennen lehrt, so ist die Aufgabe unbestimmt. Durch Substitution von $y-ax$ statt b in (1), erhält man:

$$y - \tfrac{1}{2}(y'+y'') = a\left[x-\tfrac{1}{2}(x'+x'')\right] + \tfrac{1}{2}m\sqrt{(1+a^2)},$$

welches die Gleichung der gesuchten Geraden ist. Verlegen wir den Ursprung in die Mitte von MM′ nach C, dessen Coordinaten $\frac{1}{2}(x'+x'')$, $\frac{1}{2}(y'+y'')$ sind, so hat man $y = ax + \frac{1}{2}m\sqrt{(1+a^2)} \ldots (2)$. Die Richtung der Geraden ist willkührlich geblieben; man sieht aber, daß, wenn a nach Belieben gewählt worden, die Ordinate des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Ordinatenachse $\frac{1}{2}m\sqrt{(1+a^2)}$ beträgt; mithin ist die Distanz $FC = \frac{1}{2}m$ (§. 56), woraus folgende Construction hervorgeht. Aus dem Mittelpunkt C der mittleren Entfernungen von den Achsen beschreibt man mit dem Radius $\frac{1}{2}m$ einen Kreis; jede an denselben gelegte Tangente wird allein der verlangten Bedingung genug thun. Es erläutert dies zugleich die bekannte Eigenschaft des Trapezes. (Siehe Geometrie §. 67, 4.)

Hätte man drei Punkte gegeben, so wäre es hinreichend, dem ersten Glied der Gleichung (1) noch die Größe $ax''' - y''' + b$ hinzuzufügen. Im Allgemeinen müßte man für n Punkte in (2) $\frac{m}{n}$ statt m setzen. Die Summe der aus n Punkten auf die Gerade DD′ gezogenen Senkrechten ist folglich gleich m, wenn jene DD′ den Kreis berührt, der aus dem Mittelpunkt C der mittlern Entfernungen mit einem Radius CT gleich dem nten Theil von m beschrieben wird.

III. Man soll einen Punkt M von solcher Beschaffenheit bestimmen, daß, wenn von demselben Perpendikel auf die Schenkel eines gegebenen Winkels CAB (Fig. 102) gefällt werden, das dadurch entstehende Viereck einem gegebenen Quadrat q^2 gleichgeltend sei. Es bezeichnen x', y' die Coordinaten des gesuchten Punktes, a die trigonometrische Tangente des gegebenen Winkels CAB. Die Gleichungen der Geraden AC und der auf ihr senkrecht stehenden MQ sind beziehungsweise $y = ax$ und $y - y' = -a'(x - x')$; woraus sich für die Coordinaten des Durchschnittspunktes Q der Geraden ergibt $x = \frac{x' + ay'}{1 + a^2}$, $y = a\frac{(x' + ay')}{1 + a^2}$. Für den Flächeninhalt des Dreiecks AQM haben wir den Ausdruck $\frac{AQ \times QM}{2} = \sqrt{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{ax' - y'}{\sqrt{(1 + a^2)}} = \frac{(ax' - y')(x' + ay')}{2(1 + a^2)}$, wenn für x und y die vorhin gefundenen Werthe substituirt werden. Für den Flächeninhalt des Dreiecks APM hat man den Ausdruck $AP \cdot PM = \frac{x'y'}{2}$. Vermittelst dieser beiden Ausdrücke erhalten wir dann die Bedingungsgleichung: $\frac{(ax' - y')(x' + ay')}{2(1 + a^2)} + \frac{x'y'}{2} = q^2$, oder $y'^2 - 2ax'y' - x'^2 = -2q^2\frac{(1 + a^2)}{a}$, woraus man sieht, daß eine unendliche Anzahl von Punkten der Aufgabe Genüge leisten, welche Punkte sämmtlich auf einer Hyperbel liegen.

IV. Von einem Punkte K sind die zwei Tangenten KM, KN (Fig. 103) an eine gegebene Ellipse CMN gelegt und die die Berührungspunkte verbindende Gerade MN gezogen. Läßt man nun den Punkt K irgend eine gegebene Gerade AB durchlaufen, so werden die Punkte M, N mit der Geraden MN sich gleichzeitig ändern. Man verlangt den geometrischen Ort der auf einander folgenden Durchschnittspunkte unserer Sehnen MN. Durch den Mittelpunkt C lege die Linie CD parallel zu AB und ziehe den zu Cy conjugirten Diameter AC, und nehme diese Linien als Achsen an. Geht man von der Gleichung der an die Ellipse durch einen gegebenen Punkt K(α, β) gelegten Tangente aus, so ist bewiesen (§. 99), daß es zwei Tangenten gibt, und daß die die Berührungspunkte verbindende Sehne $a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2$ zur Gleichung hat. Durch Verlegung des Punktes K nach B wird die Gleichung der Sehne die nämliche sein, mit dem Unterschiede, daß β in β' übergegangen ist. Der Durchschnitt dieser Sehnen wird da-

durch erhalten, daß man x und y zwischen diesen Gleichungen eliminirt. Zieht man sie von einander ab, so entsteht $a^2y(\beta-\beta')=o$ oder $y=o$. Es ist also hiermit bewiesen, daß der Durchschnitt auf der Achse der x liegt, welche Werthe auch β und β' haben mögen; woraus folgt, daß sich diese Sehnen sämmtlich in einem einzigen Punkte schneiden. — Für die Hyperbel und Parabel findet die nämliche Eigenschaft statt.

§. 157. Die oben auseinandergesetzten Prinzipien sind zuweilen ausreichend, die Gleichungen der höhern Grade in x und y zu discutiren.

I. Die Gleichung $x^2y^2+y^4-y^2-x^3-xy^2+x=o$ ist gleichgeltend mit $(x^2+y^2-1)(y^2-x)=o$. Setzt man jeden Factor besonders Null, so findet man, daß die Curve das System eines Kreises BCP (Fig. 56), dessen Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung C ist, und einer Parabel MAM′ darstellt.

II. Aus der Gleichung $y^2-x^2y^2=1$ folgt, $y=\pm\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ und $x=\pm\frac{\sqrt{(y^2-1)}}{y}$; die Curve ist demnach symmetrisch rücksichtlich der Coordinatenachsen, so daß, wenn man die Figur um eine oder die andere dieser Achsen legt, die Theile derselben zusammenfallen. Da $x<1$ und $y=\infty$ für $x=\pm1$, so sind die auf beiden Seiten der Ordinatenachse in der Entfernung 1 zu derselben parallel gelegten Linien Asymptoten der Curve, welche ganz zwischen ihnen enthalten ist und aus zwei abgesonderten, unendlichen Zweigen besteht, wie die Figur 86 anzeigt, mit dem Unterschiede, daß sie zwischen zwei der Achse der y parallellaufenden Geraden eingeschlossen werden und die Ordinate $>\pm1$ ist.

III. Es sei noch die Gleichung $y^2-x^3+(a-b)x^2+abx=o$; sie gibt $y=\sqrt{[x(x-a)(x+b)]}$. Die Curve (Fig. 104) ist symmetrisch auf beiden Seiten der Achse der y, welche sie in den drei Punkten A, C und B schneidet, für welche $x=o$, a und $-b$ ist. Man kann das positive x nicht $<a$ nehmen; über diesen Punkt hinaus kann es aber bis ins Unendliche wachsen. Die Curve dehnt sich also auf einer Seite in zwei unendliche Aeste aus, die in der Form einer Glocke auslaufen, woher sie den Namen Glockenlinie erhalten hat. In der Richtung der negativen x hat sie dagegen eine geschlossene, ovale Ge-

stalt und erstreckt sich nicht über B hinaus. Ist $a = o$, so wird $y = \pm x\sqrt{(x+b)}$, und der Abstand AC ist Null. Die Curve hat dann die Form wie Figur 104 (a), wo der Punkt C des ins Unendliche sich erstreckenden Doppelastes mit A zusammenfällt. Ist $b = o$, so verschwindet der ovale Theil AB und reducirt sich auf einen von dem unendlichen Zweige CM abgesonderten, isolirten Punkt A. Ist endlich $b = o$ und $a = o$, so wird die Gleichung der Curve $y^2 = x^3$. Sie heißt dann die Neil'sche Parabel und hat zwei unendliche Aeste, die beide auf der positiven Seite der x liegen und sich im Anfangspunkt der A zu einer Spitze vereinigen (Fig. 104, b). Der Geometer Neil hat diese Curve zuerst betrachtet und mehrere Eigenschaften derselben gefunden.

IV. Es sei endlich die Gleichung $y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = o$ (Fig. 105). Unsere Curve wird durch die Coordinatenachsen in vier gleiche und ähnlich liegende Theile getheilt, weil ihre Gleichung sich nicht ändert, welches Zeichen auch jede der Veränderlichen erhält. Sie heißt deshalb insbesondere die symmetrische Curve, obschon auch die meisten Curven eine symmetrische Lage haben. Die Gleichung nach y aufgelöst gibt

$$y = \pm\sqrt{[48a^2 \pm \sqrt{((x-6a)(x+6a)(x-8a)(x+8a))}]};$$

woraus hervorgeht, daß y zwischen $x = 6a = AC$ und $x = 8a = AD$ imaginär wird, während es, wenn $x < 6a$ ist und zwischen 8a und 10a liegt, vier verschiedene Werthe hat, wovon je zwei gleich und entgegengesetzt sind. Den Werthen $x = o$, $x = 6a$ und $x = 8a$ entsprechen die Werthe $y = o$, $y = 4a\sqrt{3}$ und $y = 4a\sqrt{3}$; für beiden letzterwähnten Abscissen sind die zwei Werthe von y einander gleich, die in den betreffenden Punkten E und E', F und F' an die Curve gelegten Tangenten stehen mithin auf der Abscissenachse senkrecht. Von $x = \pm 10a$ bis $x = \pm \infty$ bleiben nur zwei Werthe von y reell. Die Curve begegnet überdies der Abscissenachse in den Punkten A, B und B' für welche $x = o$, $x = a$ und $x = -a$ ist, und der Ordinatenachse in den Punkten A, G und G', für die $y = o$, $y = 4a\sqrt{6}$, $y = -4a\sqrt{6}$. Diese kurze Diskussion zeigt, daß die fragliche Curve aus einem abgesonderten Theil GEE'G' besteht, auf dessen beiden Seiten zwei ins Unendliche sich erstreckende Zweige FBH, F'B'H' liegen.

Sechstes Kapitel.

Von einigen andern Curven.

Curven höherer Grade.

§. 158. Wenn verschiedene Punkte F, G, M, Z... (Fig. 34) gegeben sind, so hindert Nichts, solche durch eine unendliche Anzahl von Curven mit einander zu vereinigen. Unter denjenigen Linien, welche man hier wählen kann, zieht man jedoch die in analytischer Hinsicht einfachste vor; es ist dies die Linie, deren Gleichung die Form $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ u. s. w. hat. Solche Linien heißen **parabolische Curven**, weil man sie als eine Verallgemeinerung der Parabel betrachten kann, in welche sie in der That übergeht, wenn auf der linken Seite unserer Gleichung nur die drei ersten Glieder vorkommen. — Nachdem man zwei Achsen Ax, Ay gezogen und die Coordinaten AD, DF; AC, CG... der bekannten Punkte verzeichnet hat, nimmt man in der Gleichung eben so viel Glieder auf, als solcher Punkte vorhanden sind. Es handelt sich jetzt darum, die Coefficienten A, B... unserer Gleichung den gegebenen Bedingungen gemäß zu bestimmen, nämlich: daß erstens $x = AD = \alpha$ gibt $y = DF = a$, woraus $a = A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots$; zweitens daß $x = \beta$ gibt $y = b$, woraus $b = A + B\beta + C\beta^2 + \ldots$, u. s. w. mit den übrigen Punkten. Um nun die Werthe der Unbekannten A, B, C... zu erhalten, muß man zur Elimination derselben schreiten. Die Rechnung läßt sich aber einfacher und allgemeiner auf folgende Weise darstellen. Weil nämlich $x = \alpha$ den Werth $y = a$ geben soll, so wird der Ausdruck von y die Form $y = Aa + K$ haben, wobei A und K in der Art zusammengesetzt sind, daß $x = \alpha$ mache $A = 1$ und $K = 0$; folglich $K = (x - \alpha) K'$. Ueberdies erhält man $y = b$, wenn $x = \beta$ wird; man hat also $y = Bb + L$, wo $L = (x - \beta) L'$. Um diese beiden Bedingungen mit einander zu verbinden, ergibt sich hiernach

$$y = \frac{x-\beta}{\alpha-\beta} A'a + \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} B'b + (x-\alpha)(x-\beta) M,$$

wo A′ und B′ = 1 sind, wenn man beziehungsweise $x=\alpha$, $x=\beta$ setzt. Bei einer weitern Fortsetzung dieser Schlußfolge sieht man, daß $y = Aa + Bb + Cc +$ ꝛc., eine Gleichung, in welcher

$$A = \frac{(x-\beta)\ (x-\gamma)\ (x-\delta)\ldots}{(\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)\ (\alpha-\delta)\ldots};$$

$$B = \frac{(x-\alpha)\ (x-\gamma)\ (x-\delta)\ldots}{(\beta-\alpha)\ (\beta-\gamma)\ (\beta-\delta)\ldots};$$

indem man für jeden Coefficienten einen Bruch nimmt, der so viel Factoren weniger 1 hat, als gegebene Punkte da sind. Auf solche Weise erhält man die Näherungsgleichung einer gegebenen, ganz willkührlich gezogenen Linie. Es ist deshalb hinreichend, die erforderliche Anzahl von Punkten, insbesondere an denjenigen Stellen, wo die Curve merkliche Krümmungen darbietet, zu wählen und die Coordinaten α, a, β, b... zu messen.

Man kann ebenso zwischen den isolirten Punkten F, G, M, Z... andere Punkte suchen, welche dem nämlichen Gesetze unterworfen sind; ja selbst unter mehreren durch gewisse Verhältnisse mit einander verbundenen Größen ein Gesetz erhalten, welches dazu dienen kann, durch Annäherung irgend einen darauf Bezug habenden Nebenumstand kennen zu lernen. Es besteht hierin das Wesen der Interpolationsmethode, von der man einen so häufigen Gebrauch in den Naturwissenschaften macht. (Siehe die höhere Algebra.)

Anmerkung. Die parabolischen Curven müssen nicht mit den Parabeln höherer Art verwechselt werden, unter welchen letztern man diejenigen Curven begreift, deren Gleichung von der Form $y^n = ax^m$ sind. — Jede parabolische Curve erstreckt sich ins Unendliche, weil für jeden Werth von x, wie groß er auch sein mag, stets ein reeller Werth von y existirt.

Mit Hülfe des obigen Raisonnements läßt sich auch eine Curve von bekannter Gattung durch eine Anzahl gegebener Punkte legen; die Gleichung dieser Curve muß alsdann so viel willkührliche Constanten enthalten, als solcher Punkte da sind, widrigenfalls das Problem ungereimt oder unbestimmt sein würde. Die allgemeine Gleichung des Kreises z. B. ist $(y-k)^2 + (x-h)^2 = r^2$; man kann demnach nicht verlangen, daß diese Curve durch mehr als drei bekannte Punkte (α, a), (β, b), (γ, c) gehe. Für die Bestimmung der Constanten h, k und r bestehen die Bedingungsgleichungen:

$$(a-k)^2 + (\alpha-h)^2 = r^2,$$
$$(b-k)^2 + (\beta-h)^2 = r^2,$$
$$(c-k)^2 + (\gamma-h)^2 = r^2.$$

Wäre der Radius bekannt, so dürften nur noch zwei Punkte gegeben sein, u. s. w. Im Allgemeinen kann man einen Kegelschnitt durch fünf Punkte legen, weil in der allgemeinen Gleichung vom zweiten Grad, in der der Coefficient des ersten Gliedes 1 ist, fünf willkührliche Constanten vorkommen.

Anmerkung. Man hat in diesem Fall fünf Gleichungen, in denen von den fünf unbekannten Größen jede vom ersten Grade und keine in die andere multiplicirt sich vorfindet. Jede derselben erhält also nur einen Werth. — Diese Gleichungen können sich in gewissen Fällen widersprechen. So z. B. ist es nicht möglich durch drei der gegebenen Punkte, wenn sie in gerader Linie liegen, eine Curve vom zweiten Grade zu legen. Auch sieht man leicht ein, daß wenn die Curve der Gattung und Lage nach gegeben ist, weniger Bedingungen zu ihrer Bestimmung nöthig sind. — Zwei Kegelschnitte schneiden einander in weniger als fünf Punkten, weil sie zusammenfallen würden, wenn sie fünf Punkte gemein hätten.

§. 159. Welches ist die Curve DM, QE (Fig. 106), die aus dem fortwährenden Durchschnitt einer um den Punkt B sich drehenden Geraden BM und eines Kreises MEQ entsteht, dessen Mittelpunkt C längs der Linie AC hingleitet, dergestalt, daß derselbe sich stets auf BM befindet? Wir nehmen AC zur Abscissenachse und die aus B darauf errichtete Senkrechte BD zur Ordinatenachse, und setzen $AC = \alpha$, $AB = b$, $CM = AD = a$. Die Gleichung des Kreises und der durch die Punkte B $(o, -b)$ und C (α, o) gehenden Geraden BM sind bezüglich $(x-\alpha)^2 + y^2 = a^2$, und $\alpha y = b(x-\alpha)$. Die Elimination von α gibt $x^2y^2 = (a^2-y^2)(y+b)^2$, welches die Gleichung der fraglichen Curve ist, die der griechische Geometer Nikomedes Conchoide (Muschellinie) genannt hat. Aus ihrer Entstehungsart ergibt sich, daß sie aus zwei ins Unendliche fortlaufenden Aesten besteht, von denen einer unterhalb, der andere oberhalb der Achse Ax liegt, die eine Asymptote der Conchoide ist. Die größte Breite derselben findet in DD′ statt, wenn die bewegliche Gerade BM senkrecht auf AC

steht. Wenn $a > b$, so bildet sich in D' eine Schleife (Fig. 106, a), welche verschwindet und nur eine Spitze zurückläßt, wenn $a = b$ ist.

Anmerkung. Die Alten wendeten diese Curve so wie die folgende an, um zwischen zwei gegebenen Linien zwei stetige Proportionallinien zu finden. Auch gebraucht man sie zu Verzierungen in der Baukunst und zur Bestimmung des Inhalts der Fässer.

§. 160. Es ist ein Kreis AFB (Fig. 107) und seine Tangente BD gegeben; man soll den Ort der Punkte finden, welche so liegen, daß, wenn die Gerade AD sich um den Punkt A dreht, das Stück AM stets gleich FD sei. Unsere Curve entsteht aus dem fortwährenden Durchschnitt der Linie AD und eines zweiten Kreises, dessen Mittelpunkt in A liegt und dessen veränderlicher Radius R immer gleich FD ist. Die Gleichungen der beiden Kreise und der Geraden AD, wenn A als Ursprung gilt, sind $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 = 2ax - x^2$ und $y = Ax$, A und R ändern sich und man hat $AM = FD$, oder $AP = EB$. Nun findet man leicht, daß $AE = \frac{2a}{1+A^2}$, mithin $BE = \frac{2aA^2}{1+A^2}$; ferner daß $AP = R \cos MAP = \frac{R}{\sqrt{(1+A^2)}}$. Hiernach entsteht als Bedingungsgleichung $R\sqrt{(1+A^2)} = 2aA^2$. Eliminirt man R und A aus derselben mit Hülfe $x^2 + y^2 = R^2$ und $y = Ax$, so kommt die gesuchte Gleichung $x^3 + xy^2 = 2ay^2$, oder $y^2 = \frac{x^2}{2a-x}$. Aus dieser Gleichung ergibt sich:

1) x darf nicht negativ, auch nicht $> 2a$ sein; die Curve liegt also gänzlich innerhalb des zwischen den Geraden Ay und BD enthaltenen Raumes.

2) Sie besitzt zwei gegen die Achse AB symmetrische Aeste.

3) Sie geht durch den Ursprung A, wo sich eine Spitze bildet.

4) Für $x = a$ wird $y = \pm a$; die Punkte H und H', wo die Curve der gegebenen Kreislinie begegnet, theilen dieselbe in ihre vier Quadranten.

5) $x = 2a$ gibt $y = \infty$; BD ist demnach eine Asymptote der Curve.

6) AB ist eine den beiden Aesten gemeinschaftliche Tangente.

Der griechische Geometer Diokles nannte diese Curve Cissoide. (Epheuartige Linie.)

§. 161. Die Curve zu finden, deren Punkt M so liegen, daß das Produkt ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten F und F′ (Fig. 108) beständig gleich b^2 ist. Es sei die Linie FF′ die Abscissenachse, die Mitte O von FF′ (2a) der Ursprung des rechtwinkligen Coordinatensystems. Der Bedingung der Aufgabe zu Folge ist

$$\sqrt{[y^2+(a+x)^2]}\ \sqrt{[y^2+(x-a)^2]} = b^2$$

oder $(x^2+y^2+a^2)^2 = b^4+4a^2x^2$. Aus dieser Gleichung folgt:

1) Die Curve schneidet die Abscissenachse in den Punkten $x = \pm\sqrt{(a^2+b^2)}$ und $x = \pm\sqrt{(a^2-b^2)}$; d. h. in vier Punkten, wenn $a > b$ oder $a = b$, und nur in zwei Punkten, wenn $b > a$.

2) Sie trifft die Ordinatenachse in den Punkten $y = \pm\sqrt{(b^2-a^2)}$, d. h. gar nicht, so lange $b < a$; in dem Ursprung dagegen, wenn $b = a$; und für den Fall, daß $b > a$, in den Punkten, für welche $y = \pm\sqrt{(b^2-a^2)}$.

3) Von den vier Werthen von y sind stets zwei für jedes x imaginär; die beiden andern reell für alle positiven x, welche zwischen $\sqrt{(a^2-b^2)}$ und $\sqrt{(a^2+b^2)}$, und für alle negative x, welche zwischen denselben Grenzen liegen, wenn $b < a$. Dagegen sind diese beiden Werthe reell für alle Werthe von x, welche zwischen $-\sqrt{(a^2+b^2)}$ und $+\sqrt{(a^2+b^2)}$ liegen, wenn $b >$ oder $= a$ ist.

4) Da nur gerade Potenzen von x und y in der Gleichung vorkommen, so hat die Curve auf beiden Seiten der Achse x sowohl, als auch der der y eine vollkommen ähnliche Gestalt.

5) Die Curve besitzt keinen ins Unendliche gehenden Zweig.

6) Sie besteht aus zwei von einander getrennten Ovalen ab, a′b′, wenn $b < a$. Für $b = a$ hat sie die Form dcod′c′, und heißt Lemniskate oder Schleifenlinie. Ist $b > a$ und zugleich $< a\sqrt{2}$, so nimmt die Form e′eff′ an. Ist $b > a$ und zugleich $> a\sqrt{2}$, so geht sie in die Gestalt gMAg′B über und heißt Cassinoide, von ihrem Erfinder, dem berühmten Astronomen Dominicus Cassini.

Anmerkung. Die Lemniskate und ihre Varietäten kommen in der Optik vor, wo man ihnen den Namen isochromatischen (gleichfarbigen) Curven gegeben hat. Man sehe deshalb Herschels Werk vom Licht (übersetzt von E. Schmidt) Seite 492 nach.

§. 162. Es ist ein Kreis und ein Punkt A (Fig. 109) auf demselben gegeben. Durch diesen Punkt A werden verschiedene Sehnen

AB gezogen und zu beiden Seiten des Durchschnittspunktes B die Stücke BM und BM′ jedes gleich 2r getragen, wo r der Radius des Kreises ist; man soll den Ort der Endpunkte M und M′ finden. Es sei A der Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten und die durch den Mittelpunkt des Kreises gehende Gerade die Absciſſenachse. Die ähnlichen Dreiecke ABD, APM geben AD : AB = AM : AP, oder, wenn man $AM = z$ setzt, $2r : z - 2r = z : x$, woraus $2rx = z^2 - 2rz$. Wird für z sein Werth $\sqrt{(x^2+y^2)}$ eingeführt, so kommt $2r\sqrt{(x^2+y^2)} = x^2 + y^2 - 2rx$, oder $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4r(x^3 + y^2x + ry^2) = o$, für die Gleichung der gesuchten Curve, welche Cardioide oder herzförmige Linie heißt.

Anmerkung. Man sieht zuweilen die Cardioide auf der Oberfläche eines mit einer Flüssigkeit gefüllten Gefäßes, das im Sonnenschein steht.

§. 163. Aus dem Endpunkt A eines Durchmessers $AD = d$ eines Kreises werden verschiedene Sehnen AB (Fig. 110) gezogen, von den Endpunkten B derselben dann die Senkrechten BE auf den Durchmesser und aus den Fußpunkten E der letztern die Perpendikel EM auf die Sehnen gefällt; man soll den geometrischen Ort der auf diese Weise bestimmten Punkte M finden. Wir nehmen A als Ursprung des rechtwinkligen Coordinatensystems und AD zur Absciſſenachse. Wir haben sofort $x : y = y : PE$ oder $y^2 = x\,(AE - x)$. Ferner ist $AP : AE = AM : AB$ und $AM : AB = AE : AD$; hieraus $AE = \sqrt{AP \cdot AD} = \sqrt{xd}$. Wird dieser Werth von AE in die obige Gleichung substituirt, so kommt $x^4 - dx^3 + 2x^2y^2 + y^4 = o$ als analytischer Ausdruck des gesuchten Orts, dem wegen seiner Form der Namen Eilinie gegeben wird.

Anmerkung. Wer über die algebraischen Curven, die von höherer Ordnung als der zweiten sind, sich ausführlicher unterrichten will, dem sind folgende zwei klassische Werke anzuempfehlen:

1) Leonhard Euler's Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Aus dem Lateinischen übersetzt von Michelsen. Zweites Buch. Berlin bei Reimer.

2) System der analytischen Geometrie, auf eine neue Betrachtungsweise gegründet, und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend, von J. Plücker. Berlin bei Duncker und Humblot.

Transcendente Curven.

§. 164. Man nennt diejenigen krummen Linien, deren Gleichungen auf rechtwinklige oder schiefwinklige Axe bezogen, nicht algebraisch, sondern transcendent sind und z. B. die Größe log. x, sin x u. s. f. enthalten, im Gegensatz der algebraischen: **transcendente Curven**.

Die Curve OBM (Fig. 111), deren Abscissen AE, AP... die Logarithmen der entsprechenden Ordinaten EF, MP... sind, wird **logarithmische Linie** oder **Logistik** genannt. Ihre Gleichung ist $x = \log. y$ oder $y = a^x$, wo a die Basis darstellt. Aus dieser Gleichung ergibt sich unmittelbar Folgendes:

1) Die Curve besitzt nur einen Ast, der rechts und links ins Unendliche fortläuft.

2) Im Anfangspunkt A ist die Ordinate $AB = 1$.

3) Für $AE = AB = 1$ ist die Ordinate $EF = a$, gleich der Basis des Logarithmensystems.

4) Für $a > 1$ entfernt sich der Theil BM der Curve, der nach der Seite der positiven Abscissen liegt, immer mehr und mehr von der Abscissenachse Ax, dagegen sich der andere Theil BO gegen AQ hin fortwährend nähert, wonach QAx eine Asymptote der Curve ist.

5) Für $a < 1$ findet das Umgekehrte statt.

6) Die Ordinaten bilden eine geometrische Reihe, wenn die zugehörigen Abscissen in arithmetischer Reihe fortschreiten. — Die verschiedenen Arten von logarithmischen Linien sind durch die Basis von einander unterschieden.

§. 165. Wir betrachten die **Sinuslinie** (Fig. 112), d. i. die Curve, deren Gleichung $y = \sin x$ ist. Jede Abscisse stellt einen in gerader Linie ausgestreckten Kreisbogen und die Ordinate den zugehörigen Sinus für einen Radius r dar. Wird der Bogen o, πr, $2\pi r$..., so ist der Sinus Null; die Curve schneidet demnach die Achse der x in den Punkten A, B, B', C, C'..., für welche $x = o$, $\pm \pi r$, $\pm 2\pi r$... Indem der Bogen von Null bis $\frac{1}{2}\pi r = AE$ wächst, wächst auch der Sinus von Null bis $EF = r$; er nimmt dagegen ab, wenn x weiter zunimmt. Das Curvenstück AFB ist sonach symmetrisch in Bezug auf FE. Geht x über $AB = \pi r$ hinaus, so wird der Sinus negativ, und man erhält, da derselbe die nämlichen Werthe wie

vorhin wieder annimmt, einen, dem ersten gleichen, zweiten Theil der Curve BDC, die auf diese Weise ihren Lauf ins Unendliche fortsetzt. — Dergleichen Curven sind nur hinsichtlich des Radius r von einander unterschieden.

§. 166. Ein Punkt M (Fig. 113) bewegt sich längs der Linie CM, während die letztere zu gleicher Zeit sich um den Punkt C dreht. Der Punkt M befindet sich in A, wenn der bewegliche Radius mit CA zusammenfällt; dabei soll sich stets AC zu AP wie der Quadrant ac zu dem durchlaufenen Bogen ab verhalten. Man verlangt die durch den Punkt A bei dieser Bewegung beschriebene Curve AMDB. Dieselbe wird durch den fortwährenden Durchschnitt des Radius CM und der auf CA errichteten Senkrechten PM erzeugt. Es sei C der Ursprung, $AC = a$, $ab = \vartheta$, $CP = \alpha$. Die Gleichungen von CM und PM sind $y = x \tang \vartheta$ und $x = \alpha$. Die vorgeschriebene Bedingung $\frac{AC}{AP} = \frac{ac}{ab}$ gibt $\frac{a}{a-\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\vartheta}$. Durch Elimination von α und ϑ entsteht $y = x \tang\left(\frac{\frac{1}{2}\pi(a-x)}{a}\right)$, oder $y = x \cot\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$ als Gleichung des gesuchten Ortes. Hieraus findet man leicht folgende Ergebnisse:

1) Die Curve liegt symmetrisch auf beiden Seiten der Achse Cy.

2) $\pm x > a$ gibt y negativ.

3) $\pm x = 2a$ liefert die Asymptoten QN, Q′N′.

4) $x = o$ gibt $y = o \times \infty$, ein sonderbarer Ausdruck der Ordinate CD, dessen wahren Werth wir später aufsuchen werden. (Siehe die Differentialrechnung.) Dinostratus hat dieser Curve den Namen Quadratrix wegen des Nutzens gegeben, den er ihr in Bezug auf die Quadratur des Kreises beilegte.

Anmerkung. Um den wahren Werth von $y = x \cot\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$ für $x = o$ zu erhalten, kann man wie folgt verfahren. Wir haben $y = \frac{x \cos \frac{\pi x}{2a}}{\sin \frac{\pi x}{2a}} = \frac{x\left[1 - \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{\pi}{2a}x\right)^2 + \text{etc.}\right]}{\frac{\pi}{2a}x - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\pi}{2a}x\right)^3 + \text{etc.}}$. (Siehe höhere Algebra.) Wird dieser Ausdruck durch x gehoben und dann $x = o$ gesetzt, so entsteht $y = \frac{2a}{\pi}$. Es stimmt dieser

Werth mit demjenigen überein, welchen die Polargleichung der Curve uns im vorliegenden Falle liefert. Es ist nämlich, wenn u den Radiusvector CM bezeichnet, $u = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{t}{\sin t}$, wenn wir den Winkel $DCM = t$ setzen. Das veränderliche Verhältniß $\frac{t}{\sin t}$ nähert sich unaufhörlich der Einheit, in dem Maße als t abnimmt und geht in diese Grenze über, wenn $t = o$ wird. Für diesen Fall erhält demnach der Radiusvector CD, der hier mit der Ordinate y für $x = o$ zusammenfällt, den Werth $\frac{2a}{\pi}$, d. h. ganz denselben Ausdruck wie oben.

§. 167. Wenn ein Kreis auf einer Geraden AB (Fig. 114) hinrollt, so wird der Punkt M, der ursprünglich in A Berührungspunkt war, den Bogen AM beschrieben, und der neue Berührungspunkt mit AB in D liegen, dergestalt, daß AD die Abwicklung des Kreisbogens MD ist. Indem man diese Bewegung des Kreises weiter fortsetzt, beschreibt der Punkt M die Curve AMFB, welche Cycloide oder Radlinie genannt wird. Nach einer ganzen Umwälzung wird der Punkt M die Gerade AB in B berühren, der hiernach ein Punkt der Curve ist, und AB dem Umfang des Erzeugungskreises gleich sein. Der höchste Punkt F, in welchem sich der beschreibende Punkt M befindet, wenn der Kreis eine halbe Umwälzung gemacht hat, heißt der Scheitel und die entsprechende Ordinate FE gleich dem Durchmesser $= 2r$ die Achse der Cycloide, welche auf beiden Seiten dieser Achse symmetrisch liegt. Die Cycloide setzt ihren Lauf ohne Ende fort, wobei sich in A, B... Spitzen bilden. Um eine Gleichung für diese Curve zu erhalten, nehmen wir AB zur Abscissenachse, den Punkt A zum Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten. Für einen beliebigen Punkt M der Curve ist hiernach $MP = y$, $AP = x$. Da nun $AP = AD - PD$, so hat man $x = MD - z$, wenn man $PD = z$ setzt. z stellt aber die der Abscisse $DQ = y$ entsprechende Ordinate QM des Kreises CM dar, mithin $z^2 = 2ry - y^2$. Ferner ist z der Sinus des Kreisbogens MD, was folgendermaßen ausgedrückt wird: $MD = \text{arc}(\sin = z)$. Man erhält also $x = \text{arc}(\sin = z) - z$, oder auch

$$x = r \cdot \text{arc}\left(\cos = 1 - \frac{y}{r}\right) - \sqrt{(2ry - y^2)}$$

als gesuchte Gleichung der Cycloide, statt welcher Gleichung man auch das System der beiden Gleichungen $x = rt - r\sin t$ und $y = r - r\cos t$ gebrauchen kann, wobei rt den Bogen MD darstellt.

Wird der Scheitel F zum Ursprung und die Gerade FS zur Abscissenachse genommen, also $FS = x'$, $SM = y'$, so hat man $FS = AE - AP = AE - (AD - PD) =$ Halbkreis FKE $-$ Bogen $MD + MQ$,

$$\text{oder } x' = r \cdot \text{arc}\left(\cos = 1 - \frac{y'}{r}\right) + \sqrt{(2ry' - y'^2)},$$

für welche das System der beiden Gleichungen

$$y' = r(1 + \cos t) \text{ und } x' = r(\pi - t) + r\sin t$$

gesetzt werden kann, wobei t die nämliche Bedeutung wie vorhin hat. Galiläi, Fermat, Descartes, Roberval, Pascal, Huyghens und andere Mathematiker haben sich mit dieser Curve vielfältig beschäftigt, wodurch sie berühmt geworden. Uebrigens besitzt sie merkwürdige geometrische und mechanische Eigenschaften, die näher auseinander zu setzen hier der Ort nicht ist.

Anmerkung. Hinsichtlich der geometrischen Eigenschaften dieser Linie, so wie der übrigen hier abgehandelten transcendenten Curven verweisen wir auf die Differentialrechnung, oder das siebente Bändchen unsers Lehrbuches, desgleichen auf Eytelweins Theorie derjenigen transcendenten krummen Linien, welche vorzüglich bei statischen Untersuchungen vorkommen, als Anhang zur Statik. Berlin, bei Reimer.

Was die mechanischen Eigenschaften der Cycloide anlangt, so ist vorzüglich zu empfehlen: Poissons vortreffliches Lehrbuch der Mechanik, aus dem Französischen übersetzt von M. v. Stern. Berlin, bei Reimer. — Ferner M. Ohm's Lehrbuch der Mechanik, erster Band. Berlin bei Enslin.

§. 168. Liegt der beschreibende Punkt nicht auf der Peripherie des wälzenden Kreises, sondern innerhalb der Kreisfläche, etwa in M' (Fig. 115), so beschreibt dieser Punkt M' die geschweifte Cycloide A'M'F'B'. Um die Gleichung dieser Curve zu finden, sei die Gerade AB, auf welcher der Erzeugungskreis hinrollt, unsere Abscissenachse; ferner der Punkt A, in welchem sich der Endpunkt M des durch den Punkt M' gezogenen Halbmessers in einer Lage des Kreises befindet, der Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten. Wir bezeichnen für den Halbmesser 1 den Bogen, der mit dem Bogen MD

einerlei Anzahl Grade enthält, durch t, den Radius des Erzeugungskreises durch r und den Abstand des beschreibenden Punktes M′ vom Mittelpunkt C durch r′. Wir haben dann $AP' = AD - DP'$ und $M'P' = CD - CQ'$, oder $x = rt - r' \sin t$ und $y = r - r' \cos t$, wo x und y die Coordinaten des Punktes M′ bedeuten. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Größe t, so kommt

$$x = r \cdot \text{arc}\left[\cos = \frac{r-y}{r'}\right] - \sqrt{[r'^2 - (r-y)^2]}$$

für die gesuchte Gleichung. — Die geschweifte Cycloide begegnet den der Achse AB in den Entfernungen $r - r'$ und $r + r'$ parallelen Linien A′B′ und F′G′ in unzählig vielen Punkten, welche um die Länge der Peripherie des Erzeugungskreises von einander entfernt sind.

§. 169. Man kann den beschreibenden Punkt auch ausserhalb des Erzeugungskreises annehmen. Man findet für die in diesem Falle beschriebene Curve, welche verschlungene Cycloide heißt (Fig. 116) die nämlichen Gleichungen wie oben, was zu ähnlichen Resultaten führt. Die Voraussetzung von $r' > r$ macht, daß es für t ausser o noch einen andern Werth t′ gibt, welcher der Gleichung $o = rt - r' \sin t$ Genüge leistet. Diesem Werthe entspricht der Knotenpunkt H, dessen Abstand von der Achse AB gleich $y' = r - r' \cos t'$ ist. Aehnliches gilt von den Knotenpunkten H′, H″..., welche gleichfalls um die Länge der Peripherie des Erzeugungskreises von einander entfernt sind.

§. 170. Wenn ein Kreis auf der Peripherie eines andern Kreises, den er von Außen berührt, hinrollt, so beschreibt irgend ein Punkt der Peripherie M des wälzenden Kreises die Epicycloide. Um die Gleichung dieser Curve zu finden, sei O (Fig. 117) der Mittelpunkt des festen Kreises oder Grundkreises, sein Radius $= a$; C der Mittelpunkt des Erzeugungskreises in einer seiner Lagen, sein Radius $= r$. Es sei ferner D der Berührungspunkt der beiden Kreise in der betrachteten Lage, und A derjenige Punkt des festen Kreises, auf welchem sich der beschreibende Punkt M in einer andern Lage des beweglichen Kreises befindet. Wir nehmen O zum Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten und die Linie OA zur Abscissenachse. Wir fällen dann aus C und M auf OA die Perpendikel CQ und MP, ziehen MG parallel zu AO, und setzen den Winkel $AOC = t$, und den Winkel $MCD = \vartheta$. Es ist nun $x = OP = PQ + QO$ und $y = PM = CQ - CG$.

Man hat aber $PQ = MG = r \sin MCG = r \sin(t + \vartheta - 90) = -r \cos(t + \vartheta)$, und $CG = r \cos MCG = r \sin(t + \vartheta)$; ferner ist $QO = (r + a) \cos t$, und $CQ = (r + a) \sin t$. Dadurch erhält man

$$x = (r + a) \cos t - r \cos(t + \vartheta)$$

$$y = (r + a) \sin t - r \sin(t + \vartheta),$$

oder wenn man ϑ aus diesen beiden Gleichungen eliminirt,

$$x = (r + a) \cos t - r \cos \left[\frac{a + r}{r}\right] t$$

$$y = (r + a) \sin t - r \sin \left[\frac{a + r}{r}\right] t,$$

ein System von zwei Gleichungen, welches der Epycloide angehört.

Im Fall, daß das Verhältniß $\frac{a}{r}$ rational ist, wird die durch Elimination von t zwischen x und y herzustellende Gleichung der Curve algebraisch sein. Die Curve besteht aus einer unendlichen Anzahl gleicher Bogen, die in eine begrenzte Anzahl übergeht, wenn das Verhältniß der Radien beider Kreise rational ist.

§. 171. Berühren sich der feste und bewegliche Kreis von innen, so beschreibt irgend ein Punkt der Peripherie des letztern, indem er auf der Peripherie des andern fortrollt, die **Hypocycloide** (Fig. 118). Um die Gleichung dieser Linie zu erhalten, werden wir ganz auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphe verfahren. Wir erhalten dadurch:

$$x = (a - r) \cos t + r \cos \left[\frac{a - r}{r}\right] t,$$

$$y = (a - r) \sin t - r \sin \left[\frac{a - r}{r}\right] t,$$

für die Gleichung der Hypocycloide, welche ebenfalls aus unendlich vielen einander gleichen Bogen, wie AMA′, besteht.

Anmerkung. Die beiden letztern Curven sind in der Mechanik bei dem Bau der Räderwerke von Wichtigkeit. Wir verweisen deshalb auf F. v. Gerstners Handbuch der Mechanik, 3r Band. Wien, bei Sollinger; ferner auf Eytelweins schon erwähntes Handbuch der Statik fester Körper, 1r Band.

§. 172. Man versteht unter **Spirale** oder **Schneckenlinie** eine Curve, welche von jeder durch einen festen Punkt oder Pol gehenden Linie in unzählig vielen Punkten geschnitten wird. Die Spi-

ralen bilden eine besondere Gattung von Curven, deren Erzeugung, so zu sagen, den Gebrauch der Polarcoordinaten nothwendig macht. Eine solche Spirale ist die cononsche, nach ihrem Erfinder so genannt, oder archimedische, weil der berühmte Archimedes ihre vorzüglichsten Eigenschaften auffand. Diese Spirale entsteht, wenn die Gerade AI (Fig. 119) sich um einen festen Punkt A dreht, während sich zugleich auf derselben ein Punkt M dergestalt bewegt, daß immer die von dem beschreibenden Punkt M zurückgelegten Wege $AM = u$ den vom Radius AI zurückgelegten Winkeln $IAC = \vartheta$ proportional sind. Die Gerade AI fällt mit der Geraden AC zusammen, wenn sich in A der bewegliche Punkt M befindet, der dagegen in C anlangt, nachdem ein ganzer Umlauf gemacht worden ist. Der Definition zufolge ist, wenn der ganzen Peripherie der Weg $AC = a$ entsprechen soll, $\frac{2\pi}{gh} = \frac{a}{u}$ oder $2\pi u = a\vartheta$, die Gleichung der archimedischen Spirale. Die Curve geht durch die Punkte A, C...; für die successiven Umläufe von AC, nämlich $\vartheta = 2\pi, = 4\pi = \ldots$, hat man $u = a, = 2a \ldots$; so daß der Leitstrahl jedesmal um a größer wird. Für eine beliebige Anzahl k Umdrehungen geht die Gleichung $u = \frac{a\vartheta}{2\pi}$ in $u = ak + \frac{a\vartheta}{2\pi}$ über. Die archimedische Spirale läuft demnach in unzähligen, immer größer werdenden Windungen um den Pol herum.

§. 173. Es seien die senkrecht auf einander stehenden Linien AC, CD (Fig. 120) gezogen, ferner aus C als Mittelpunkt die Kreisbogen PM so beschrieben, daß sie einer gegebenen Linie $CD = a$ an Länge gleich werden; die auf solche Weise erhaltenen Endpunkte M dieser Bogen bestimmen eine Curve NM, deren Gleichung leicht zu finden ist. Man hat in der That $\frac{Ch}{gh} = \frac{CM}{PM}$. Nun ist $PM = a$, $Ch = 1$; folglich $u\vartheta = a$ als Gleichung für die betreffende Curve, welche wegen der Aehnlichkeit ihrer Gleichung mit jener $xy = m^2$ der Hyperbel, die hyperbolische Spirale genannt wird. Man sieht, daß die zu AC parallel laufende Gerade DE eine Asymptote abgibt. Da $u = \frac{a}{\vartheta}$ für $\vartheta = \infty$ erst Null wird, und $\vartheta = 2\pi, = 4\pi \ldots$ immer kleinere Werthe für u liefern; so geht die Curve in unzähligen, immer enger werdenden Windungen um den Pol.

§. 174. Die Curve ABM (Fig. 121), deren Gleichung $\vartheta = \log. u$ oder $u = a^{\vartheta}$, mithin der Gleichung der logarithmischen Linie $y = a^x$ analog ist, heißt **logarithmische Spirale**. Für wachsende positive ϑ entfernt sich diese Spirale auf der einen Seite vom Pole durch unzählige Windungen, während sie sich auf der andern Seite für wachsende negative ϑ diesem Punkte immer mehr und mehr nähert, ohne ihn jemals zu erreichen. Hinsichtlich ihres Laufes stimmt diese Curve demnach, wie man sieht, mit den beiden vorhergehenden in gewisser Beziehung überein.

Die logarithmische Spirale entsteht, wenn sich eine gerade Linie AM um einen festen Punkt A dreht, und auf derselben sich zugleich ein Punkt M so bewegt, daß, während die Winkel, welche von der Geraden so beschrieben werden, in arithmetischer Progression wachsen, die Längen von AM in geometrischer Progression zunehmen.

§. 175. Die **parabolische Spirale** (Fig. 122) hat zur Gleichung $u = \sqrt{p\vartheta}$, so daß u mittlere Proportionale zwischen p und ϑ ist. Bei dieser Spirale verhalten sich also die Quadrate der Polarabstände AM wie die zugehörigen Kreisbogen ϑ, oder die Polarabstände sind die Ordinaten einer Parabel AN, deren Abscissen AP durch ϑ und deren Parameter durch p ausgedrückt werden.

Chordentafel für den Halbmesser gleich 1000.

G.	0′	20′	40′	Diff. für 1′	G.	0′	20′	40′	Diff. für 1′	G.	0′	20′	40′	Diff. für 1′
0°	0	6	12		42°	717	722	728		84	1338	1343	1347	
1	18	23	29		43	733	738	744		85	1351	1356	1360	
2	35	41	47		44	749	755	760		86	1364	1368	1373	
3	52	58	64		45	765	771	776		87	1377	1381	1385	
4	70	76	81	0,29	46	782	787	792	0,27	88	1389	1394	1398	0,21
5	87	93	99		47	798	803	808		89	1402	1406	1410	
6	105	111	116		48	814	819	824		90	1414	1418	1422	
7	122	128	134		49	829	835	840		91	1426	1431	1435	
8	140	145	151		50	845	851	856		92	1439	1443	1447	
9	157	163	169		51	861	866	872	0,25	93	1451	1455	1459	0,20
10	174	180	186		52	877	882	887		94	1463	1467	1471	
11	192	198	203		53	892	898	903		95	1475	1479	1482	
12	209	215	221		54	908	913	918		96	1486	1490	1494	
13	226	232	238		55	924	929	934		97	1498	1502	1506	
14	244	250	255		56	939	944	949		98	1509	1513	1517	
15	261	267	273	0,29	57	954	959	965	0,26	99	1521	1525	1528	0,19
16	278	284	290		58	970	976	980		100	1532	1536	1540	
17	296	301	307		59	985	990	995		101	1543	1547	1551	
18	313	319	324		60	1000	1005	1010		102	1554	1558	1562	
19	330	336	342		61	1015	1020	1025		103	1565	1569	1573	0,18
20	347	353	359		62	1030	1035	1040		104	1576	1580	1583	
21	365	370	376		63	1045	1050	1055		105	1587	1590	1594	
22	382	387	393		64	1060	1065	1070		106	1597	1601	1604	0,17
23	399	404	410		65	1075	1080	1084		107	1608	1611	1615	
24	416	422	427		66	1089	1094	1099	0,25	108	1618	1621	1625	
25	433	439	444		67	1104	1109	1114		109	1628	1632	1635	
26	450	456	461		68	1118	1123	1128		110	1638	1642	1645	
27	467	473	478	0,28	69	1133	1138	1142		111	1648	1652	1655	0,16
28	484	490	495		70	1147	1152	1157		112	1658	1661	1665	
29	501	506	512		71	1161	1166	1171		113	1668	1671	1674	
30	518	523	529		72	1176	1180	1185		114	1677	1681	1684	
31	535	540	546		73	1190	1194	1199	0,23	115	1687	1690	1693	
32	551	557	562		74	1204	1208	1213		116	1696	1699	1702	
33	568	574	579		75	1218	1222	1227		117	1705	1708	1711	0,15
34	585	590	596	0,28	76	1231	1236	1241		118	1714	1717	1720	
35	601	607	613		77	1245	1250	1254		119	1723	1726	1729	
36	618	624	629		78	1259	1263	1268		120	1732	1735	1738	
37	635	640	646		79	1272	1277	1281		121	1741	1744	1746	0,14
38	651	657	662		80	1286	1290	1295		122	1749	1752	1755	
39	668	673	679		81	1299	1303	1308	0,22	123	1758	1760	1763	0,13
40	684	690	695		82	1312	1317	1321		124	1766	1769	1771	
41	700	706	711		83	1325	1330	1334		125	1774	1777	1780	

Diff. 1 für 2′.
„ 2 „ 6′.
„ 3 „ 10′.
„ 4 „ 14′.

Diff. 1 für 3′.
„ 2 für 6′.
„ 3 für 9′.
„ 4 für 15′.

Diff. 1 für 3′.
„ 2 „ 10′.
„ 3 „ 15′.

Noten zur analytischen Geometrie in der Ebene.

Note 1 zu §. 2.

Den Abstand der Mittelpunkte der einem gegebenen Dreieck ABC (Fig. 123) eingeschriebenen und umschriebenen Kreise zu finden. Es sei O der Mittelpunkt des umschriebenen, O′ der des eingeschriebenen Kreises, r der Radius des erstern, r′ der des zweiten, und x der Abstand der Mittelpunkte OO′. Das Dreieck AOO′ gibt $x^2 = AO^2 + AO'^2 - 2AO \cdot AO' \cdot \cos OAO'$ (1). Man fälle OE, O′E′ senkrecht auf AC, desgleichen OG senkrecht auf AO′; dann ist $AO' = \frac{r'}{\sin \frac{1}{2} A}$. Ferner ist Winkel $OAO' = \frac{\pi}{2} - B - \frac{1}{2}A$; folglich $\cos OAO' = \sin (B + \frac{1}{2}A)$. Werden die für AO′ und cos OAO′ gefundenen Werthe in die Gleichung (1) substituirt, so kommt $x^2 = r^2 - 2rr' \left(\frac{\sin (B + \frac{1}{2}A)}{\sin \frac{1}{2}A} - \frac{r'}{2r \sin^2 \frac{1}{2}A} \right)$ (2). Verlängert man AO′ bis K, so gibt das Dreieck ABK: $\frac{AB}{BK} = \frac{\sin AKB}{\sin \frac{1}{2}A}$. Es ist aber $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC}$; woraus $BK = \frac{ac}{c+b}$, wo a, b, c die drei Seiten des Dreiecks bezeichnen. Folglich

$$\frac{\sin AKB}{\sin \frac{1}{2}A} = \frac{\sin (B + \frac{1}{2}A)}{\sin \frac{1}{2}A} = \frac{c+b}{a} \quad (3).$$

Erwägt man, daß $r = \frac{\frac{1}{4}abc}{\sqrt{[p(p-a)(p-b)(p-c)]}}$, $r' = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ und $\sin^2 \frac{1}{2}A = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$; so verwandelt sich die Gleichung (2) in $x^2 = r^2 - 2rr'$. — Für das gleichseitige Dreieck ist $r' = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$; folglich $x = o$.

Note 2 zu §. 14.

Das Volumen der dreiseitigen Pyramide auf algebraischem Wege zu finden. Es seien B die Basis und h die Höhe der Pyramide, deren Volumen wir V nennen wollen. Wir denken uns die Höhe h in n gleiche Theile durch Ebenen getheilt, welche der Grundfläche parallel sind und gleichen Abstand i von einander haben, was $h = ni$ gibt; ferner denken wir uns die äußern Prismen um die Pyramide construirt, wie es in den Elementen der Geometrie angegeben worden. Der Flächeninhalt Y eines beliebigen Schnittes der Pyramide wird durch die Gleichung $Y = \frac{Bx^2}{h^2}$ bestimmt, wo x die Entfernung der schneidenden Ebene vom Scheitel bedeutet. Diese Entfernungen sind hier successive i, 2i, 3i... ni, wonach wir für die entsprechenden Schnitte erhalten: $\frac{Bi^2}{h^2}$, $\frac{B\,2^2i^2}{h^2}$, $\frac{B3^2i^2}{h^2}$..... $\frac{Bn^2i^2}{h^2}$. Die Summe der Volumen der äußern Prismen hat also zum Maß

$$\frac{Bi^3}{h^2}(1^2+2^2+3^2+\dots n^2) = \frac{Bi^3n(n+1)(2n+1)}{2\cdot3\cdot h^2} = \frac{Bi^3n}{h^2}\left(\frac{2n^2+3n+1}{6}\right)$$

(siehe niedere Algebra, 10te Note). Setzen wir $\frac{h}{i}$ statt n, und bezeichnen den Ueberschuß der Summe dieser äußern Prismen über das Volumen V durch α; so haben wir $V + \alpha = \frac{1}{3}Bh + \frac{1}{2}Bi + \frac{1}{6}\frac{Bi^2}{h}$. Hieraus folgt $V = \frac{1}{3}Bh$, weil α und i so klein, als man nur immer will, werden können.

Note 3 zu §. 38.

Die in diesem Paragraphen bewiesenen vier Formeln (E) und (F) machen die Grundlage der gesammten Goniometrie aus. Es wird daher gut sein, die Herleitung gedachter Formeln auf einem und dem andern Wege nochmals zu versuchen.

I. Wir denken uns zu diesem Behuf ein Dreieck, dessen Seiten a, b, c und Winkel α, β, γ sein mögen, so daß a dem Winkel α, b dem Winkel β u. s. w. gegenüber liegt. Indem wir aus dem Scheitelpunkt γ auf die Seite c ein Perpendikel fällen, erhalten wir die drei Gleichungen $b \sin\alpha = a \sin\beta$, $c \sin\alpha = a \sin\gamma$, $b \cos\alpha + a \cos\beta = c$. Durch Elimination zweier Seiten aus diesen Gleichungen entsteht

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \text{ oder}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \text{(E)},$$

weil $(\alpha+\beta) = 180° - \gamma$, mithin $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$ ist. Die Formel (F)

gilt also für alle diejenigen Fälle, wo α und β zwei positive Größen sind, deren Summe die Zahl π nicht übertrifft. Um nun ferner die Allgemeingültigkeit unserer Formel (E) nachzuweisen, stellen wir folgende, sich leicht ergebende Sätze zusammen:

$$\cos(-\delta) = \cos\delta,\ \sin(-\delta) = -\sin\delta. \quad (1)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) = \sin\delta,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) = \cos\delta. \quad (2)$$

$$\cos(\pi+\delta) = -\cos\delta,\ \sin(\pi+\delta) = -\sin\delta. \quad (3)$$

Setzt man $-\delta$ statt δ in (2) und (3), so kommt

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right) = -\sin\delta,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right) = \cos\delta. \quad (4)$$

$$\cos(\pi-\delta) = -\cos\delta,\ \sin(\pi-\delta) = \sin\delta. \quad (5)$$

$$\cos(\delta \pm 2m\pi) = \cos\delta,\ \sin(\delta \pm 2m\pi) = \sin\delta. \quad (6)$$

$$\cos[\delta \pm (2m+1)\pi] = -\cos\delta,\ \sin[\delta \pm (2m+1)\pi] = -\sin\delta. \quad (7)$$

Die Sinus und Cosinus der Bogen

$$-\delta,\ \frac{\pi}{2} \pm \delta,\ \pi \pm \delta,\ \delta \pm 2m\pi,\ \delta \pm (2m+1)\pi$$

lassen sich folglich durch $\sin\delta$ und $\cos\delta$ ausdrücken. Dies vorausgeschickt, setzen wir jetzt in (E), wo α und β zwei spitze Winkel sind, $\pi-\alpha$ statt α. Wir erhalten dadurch $\sin(\pi-\alpha+\beta) = \sin(\pi-\alpha)\cos\beta + \sin\beta\cos(\pi-\alpha)$, oder $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$ (E'); welche Formel ihre Richtigkeit hat, für den Fall, daß $\pi-\alpha+\beta < \pi$ oder $\alpha > \beta$ ist. Die Formel (E') ergibt sich aber unmittelbar aus der Formel (E), wenn wir in derselben $-\beta$ statt β setzen. Ueberdies behalten die Formeln (E) und (E') ihre Gültigkeit, wenn wir in ihnen gleichzeitig $-\alpha$ und $-\beta$ statt α und β einführen, und dabei die Gleichung (1) berücksichtigen. Die Formel (E) gilt demnach ganz allgemein für alle positive oder negative Werthe von α und β, die zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen.

Cauchy beweist nun die Richtigkeit der Formel (E) für die übrigen Fälle folgendermaßen:

Es seien x, y irgend zwei positive oder negative Bogen, so daß $x = m\pi + \alpha$ und $y = n\pi + \beta$ ist, wo m und n zwei beliebige ganze positive oder negative Zahlen, und α, β zwei zwischen den Grenzen $-\pi$, $+\pi$ liegende Größen bezeichnen. Um von der Gleichung (E) auf folgende $\sin(x+\beta) = \sin x\cos\beta + \sin\beta\cos x$ (E'') zu gelangen, ist es hinreichend zu bemerken, daß $\sin(m\pi+\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$, $\sin(m\pi+\alpha) = \sin\alpha$, $\cos(m\pi+\alpha) = \cos\alpha$, wenn m eine gerade Zahl ist, und daß $\sin(m\pi+\alpha+\beta) = -\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(m\pi+\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(m\pi+\alpha) = -\cos\alpha$, wenn m eine ungerade Zahl ist.

Aus demselben Grund folgt unmittelbar aus der Formel (E''):

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \; (E''').$$

Setzt man in der letztern $-y$ statt y, so entsteht

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x. \; (E'''').$$

Indem wir in den beiden letztern Formeln $\frac{\pi}{2} - x$ statt x setzen, erhalten wir

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \; (F)$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \; (F')$$

Die Formeln (E'''), (E''''), (F), (F') gelten also ganz allgemein für alle positive oder negative Werthe der Bogen x und y.

II. Sarrus hat in den von Gergonne herausgegebenen Annalen der reinen und angewandten Mathematik die in Frage stehende Formel, wie folgt, bewiesen. Es seien α und β irgend zwei Bogen. Man ziehe die Sehne des Bogens $\alpha - \beta$; es ist alsdann

$$[Ch(\alpha-\beta)]^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \ldots (K).$$

Entwickelt man das zweite Glied von (K), so kommt

$$[Ch(\alpha-\beta)]^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta,$$

wenn man erwägt, daß $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, indem der Halbmesser der Einheit gleich genommen wird. Macht man $\beta = 0$, so entsteht $(Ch\alpha)^2 = 2 - 2\cos\alpha$. Da diese Formel auf jeden Bogen paßt, so ist auch $[Ch(\alpha-\beta)]^2 = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$. Die beiden Ausdrücke für $[Ch(\alpha-\beta)]^2$ einander gleich gesetzt, geben

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \ldots (1).$$

Aendert man β in $\alpha - \beta$ um, so erhält man

$$\cos\beta = \cos\alpha\cos(\alpha-\beta) + \sin\alpha\sin(\alpha-\beta),$$

oder, wenn man für $\cos(\alpha-\beta)$ seinen Werth aus (1) substituirt,

$$\cos\beta = \cos^2\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin(\alpha-\beta);$$

woraus, wenn man für $\cos^2\alpha$ seinen Werth $1-\sin^2\alpha$ einführt und reducirt, $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \ldots (2)$. Aendert man endlich in den Gleichungen (1) und (2) α in $(\alpha+\beta)$ um, so erhält man die folgenden: $\cos\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cos\beta + \sin(\alpha+\beta)\sin\beta$,

$$\sin\alpha = \sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \sin\beta\cos(\alpha+\beta),$$

welche durch Elimination nach einander die Werthe von $\cos(\alpha+\beta)$ und $\sin(\alpha+\beta)$ geben:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \; (3)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \; (4).$$

Note 4 zu §. 42.

Der Satz, daß die Summe der Sinus zweier Bogen sich zu ihrer Differenz verhält, wie die Tangente der halben Summe dieser Bogen zur

Tangente ihrer halben Differenz, wird auf geometrischem Wege gewöhnlich, wie folgt, bewiesen. Es seien AM und AN die Bogen α und β (Fig. 124), mithin $MP = \sin\alpha$, $NQ = \sin\beta$. Zieht man NC dem Durchmesser AB parallel und verlängert MP bis T, so ist $MR = \sin\alpha - \sin\beta$ $TR = \sin\alpha + \sin\beta$. Man beschreibe jetzt aus dem Punkte C als Mittelpunkt mit einem Halbmesser, der dem des Kreises ACB gleich ist, einen Bogen EDF und lege an denselben durch den Punkt D eine Tangente GH. Es ist alsdann DG = Tangente des Bogens DE = $\text{tang}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$; DH = Tangente des Bogens DF = $\text{tang}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Nun ist $RT : RM = DH : DG$; folglich $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\text{tang}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\text{tang}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$.

Note 5 zu §. 45.

Bezeichnen α, β, γ die Winkel eines Dreiecks, so finden zwischen den goniometrischen Linien von α, β, γ verschiedene interessante Gesetze statt, von denen einige der wichtigsten, mit kurzer Anleitung sie zu finden, hier folgen:

1. $1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0.$
2. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$
3. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$
4. $\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta + \text{tang}\,\gamma = \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta\,\text{tang}\,\gamma.$
5. $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma + \text{cosec}\,\alpha\,\text{cosec}\,\beta\,\text{cosec}\,\gamma.$
6. $\text{tang}\frac{\alpha}{2} + \text{tang}\frac{\beta}{2} + \text{tang}\frac{\gamma}{2} = \text{tang}\frac{\alpha}{2}\,\text{tang}\frac{\beta}{2}\,\text{tang}\frac{\gamma}{2}$
   $+ \sec\frac{\alpha}{2}\sec\frac{\beta}{2}\sec\frac{\gamma}{2}.$
7. $\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}.$
8. $\text{tang}\frac{\alpha}{2}\,\text{tang}\frac{\beta}{2} + \text{tang}\frac{\alpha}{2}\,\text{tang}\frac{\gamma}{2} + \text{tang}\frac{\beta}{2}\,\text{tang}\frac{\gamma}{2} = 1.$

In Bezug auf 1 ist:

$$\cos^2\alpha = -\cos\alpha\cos(\beta+\gamma) = -\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$

Ebenso ist $\cos^2\beta = -\cos\beta\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta$.

Addirt man diese beiden Gleichungen, so entsteht

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = -2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma;$$

welche Formel in (1) übergeht, wenn man erwägt, daß $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$.

In Bezug auf 2 ist: $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$; woraus, wenn man auf beiden Seiten $\sin\alpha + \sin\beta$ hinzu addirt,

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha(1+\cos\beta) + \sin\beta(1+\cos\alpha),$$ oder

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right);$$ welche

Gleichung mit (2) zusammenfällt, da $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2}$.

In Beziehung auf 3 ist:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2},$$ oder

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 2\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

$$+ 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2},$$ weil $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$. Aus demselben Grunde fällt die vorhergehende Gleichung mit (3) zusammen.

In Beziehung auf 4 ist: $\operatorname{tang}\gamma = -\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = -\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}$, woraus sogleich die Richtigkeit der Formel (4) sich ergibt.

In Bezug auf 5 ist: $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$ $= \frac{\sin^2\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$, wenn man erwägt, daß $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$. Die vorhergehende Gleichung geht in (5) über, wenn man $1 - \cos^2\gamma$ statt $\sin^2\gamma$ und $\cos(\alpha+\beta)$ für $-\cos\gamma$ setzt.

In Bezug auf 6 ist:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} + \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} =$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}};$$

hieraus folgt, wenn man berücksichtigt, daß $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2}$,

$\tang\frac{\alpha}{2} + \tang\frac{\beta}{2} + \tang\frac{\gamma}{2} = \frac{1 + \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma}$, welche Gleichung mit Formel (6) gleichlautend ist.

In Bezug auf 7 ist: $\cot\frac{\gamma}{2} = \tang\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\tang\frac{\alpha}{2} + \tang\frac{\beta}{2}}{1 - \tang\frac{\alpha}{2}\tang\frac{\beta}{2}}$.

Dividirt man Zähler und Nenner des zweiten Theils mit $\tang\frac{\alpha}{2}\tang\frac{\beta}{2}$, so entsteht die Formel (7).

In Beziehung auf 8 endlich ist:

$$\tang\frac{\alpha}{2}\cdot\tang\frac{\gamma}{2} + \tang\frac{\beta}{2}\cdot\tang\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\tang\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Hieraus folgt: $\tang\frac{\alpha}{2}\cdot\tang\frac{\gamma}{2} + \tang\frac{\beta}{2}\cdot\tang\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$,

weil $\cot\frac{\gamma}{2} = \tang\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Note 6 zu §. 46.

Grundformeln der ebenen Polygonometrie.

1) In einem Viereck, dessen Seiten der Ordnung nach a, b, c, d und Winkel A, B, C, D sein mögen, haben wir dem angeführten Paragraphen gemäß für die zur Basis genommene Seite a als erste, zwischen den Stücken des Vierecks bestehende Relation:

$$a = b\cos(ab) + c\cos(ac) + d\cos(ad).$$

Dieselbe geht, wenn man die Winkel (ac), (ad) durch Winkel des Vierecks ausdrückt, in folgende gleichlautende über:

$$a = b\cos A - c\cos(A+B) + d\cos(A+B+C).$$

Die aus den Scheitelpunkten B und C auf die Basis AD gefällten Senkrechten geben ferner als zweite, zwischen den Stücken des Vierecks stattfindende Relation:

$$b\sin A - c\sin(A+B) + d\sin(A+B+C) = 0.$$

Es ist klar, daß sich für jede andere, als Basis gewählte Seite des Vierecks eine ähnliche Gleichung ableiten läßt.

Durch Substitution der innern Winkel des Vierecks verwandelt sich die im Text gefundene Formel

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2[bc \cos(bc) + bd \cos(bd) + cd \cos(cd)]$$

in folgende: $a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2[bc \cos B - bd \cos(B+C) + cd \cos C]$.

Für das Fünfeck, dessen Seiten der Ordnung nach a, b, c, d, e und Winkel A, B, C, D, E sind, erhalten wir für die als Basis gewählte Seite AE (a), wenn aus den Scheitelpunkten B, C und D Perpendikel auf AE gefällt werden, analoge Gleichungen, nämlich:

$$a = b \cos A - c \cos(A+B) + d \cos(A+B+C) - e \cos(A+B+C+D).$$

$$b \sin A - c \sin(A+B) + d \sin(A+B+C) - e \sin(A+B+C+D) = o.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - 2[bc \cos B - bd \cos(B+C) + be \cos(B+C+D) + cd \cos C - ce \cos(C+D) + de \cos D].$$

Daß auch hier für jede der übrigen Seiten des Fünfecks ähnliche Gleichungen bestehen, ist für sich einleuchtend. Da dieselbe Verfahrungsweise auf jedes beliebige Polygon anwendbar ist, so haben wir für ein Polygon von n Seiten folgende Gesetze:

$$a = b \cos A - c \cos(A+B) + d \cos(A+B+C) - e \cos(A+B+C+D) + \ldots\ldots \pm z \cos(A+B+\ldots\ldots+X+Y) \quad (I);$$

$$b \sin A - c \sin(A+B) + d \sin(A+B+C) - e \sin(A+B+C+D) + \ldots\ldots \pm z \sin(A+B+\ldots\ldots+X+Y) = o \quad (II);$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist;

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + \ldots + y^2 + z^2 - 2[bc \cos B - bd \cos(B+C) + \ldots bz \cos(B+C\ldots+Y) + cd \cos C - ce \cos(C+D) + \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + yz \cos Y] \quad (III).$$

Die allgemeine Aufgabe der Polygonometrie, die Seite a nebst den an derselben liegenden Winkeln A und Z eines Polygons von n Seiten aus seinen übrigen (2n—3) Stücken zu finden, wäre hiernach gelöst. Die dritte Formel gibt nämlich unmittelbar die unbekannte Seite a. Ferner ergibt sich aus der zweiten der obigen Gleichungen:

$$o = b \sin A - c(\sin A \cos B + \cos A \sin B) + d[\sin A \cos(B+C) + \cos A \sin(B+C)] - e[\sin A \cos(B+C+D) + \cos A \sin(B+C+D)] + \ldots \pm z[\sin A \cos(B+C+D+\ldots+Y) + \cos A \sin(B+C+\ldots+Y)];$$

woraus, wenn man durch cos A dividirt, entsteht:

$$\tang A = \frac{c \sin B - d \sin(B+C) + e \sin(B+C+D)\ \ldots}{b - c \cos B + d \cos(B+C)\ \ldots\ldots} \quad (IV).$$

Um also einen der beiden gesuchten Winkel des Polygons zu finden, nehme man die gegebene Seite, welche an dem gesuchten Winkel liegt, als erste an, und multiplicire hierauf jede der übrigen gegebenen Sei-

ten, sowohl mit dem Cosinus als mit dem Sinus der Summe der zwischen ihnen liegenden Winkel; addire alsdann zur ersten Seite alle aus dem Cosinus entstandenen Produkte, indem man sie abwechselnd negativ und positiv nimmt; dividire endlich mit dieser algebraischen Summe in die algebraische Summe aller aus den Sinus genommenen Produkte, welche bei der Addition abwechselnd positiv und negativ sind; der Quotient gibt die Tangente des gesuchten Winkels.

2) Wir wollen nun noch einen allgemeinen Ausdruck für den Flächeninhalt eines Polygons von n Seiten mittelst seiner $(n-1)$ Seiten, und der von ihnen $(n-2)$ eingeschlossenen Winkel finden. Für das Viereck ABCD, dessen gegebene Seiten der Ordnung nach a, b, c und die zwei von ihnen eingeschlossenen Winkel B und C sind, und dessen Flächeninhalt wir durch Fl bezeichnen, ist, wenn die Diagonale CA (δ) gezogen wird:

$$Fl = \frac{ab \sin(ab) + c\delta \sin(c\delta)}{2}.$$

Zieht man von den Scheitelpunkten A und B Perpendikel auf die Seite c und aus B der letztern eine Parallele, so ist $\delta \sin(c\delta) = b \sin(bc) + a \sin(ac)$. Folglich, wenn dieser Werth in die vorhergehende Gleichung substituirt wird, $Fl = \frac{ab \sin(ab) + ac \sin(ac) + bc \sin(bc)}{2}$, oder, indem man für den Winkel (ac) seinen Werth $C + B - 180^0$ setzt,

$$Fl = \frac{ab \sin B - ac \sin(B+C) + bc \sin C}{2}.$$

Für das Fünfeck ABCDE, dessen gegebene Seiten a, b, c, d und die drei von ihnen eingeschlossenen Winkel B, C, D sind, hat man, wenn die Diagonale BE (δ) gezogen wird:

$$Fl = \frac{bc \sin C - bd \sin(C+D) + cd \sin D + \delta a \sin(\delta a).}{2}$$

Fällt man nun von E auf AB die Senkrechte EP′, so ist $\delta \sin(\delta a) = EP'$. Ferner entsteht dadurch das Fünfeck EP′BCD, dessen Seiten EP′, P′B, BC, CD, DE sind. In diesem Fünfeck ist nach Formel (II)

$$b \sin B - c \sin(B+C) + d \sin(B+C+D) - EP' \sin(B+C+D+E') = 0,$$

$$\text{oder } EP' = b \sin B - c \sin(B+C) + d \sin(B+C+D), \text{ weil}$$

$$B + C + D + E' = 6R - P' = 5R.$$

Dieser Werth verwandelt den für den Flächeninhalt gewonnenen Ausdruck in folgenden:

$$Fl = \frac{ab \sin B - ac \sin(B+C) + ad \sin(B+C+D) + bc \sin C - bd \sin(C+D) + cd \sin D}{2}.$$

Geht man auf diese Weise weiter fort, so findet man allgemein für den Flächeninhalt des Polygons von n Seiten die Formel:

$$\begin{aligned}
Fl = \tfrac{1}{2}[& ab \sin B - ac \sin(B+C) + ad \sin(B+C+D) \ldots \pm ay \sin(B+C+\ldots+Y) \\
& + bc \sin C - bd \sin(C+D) + \ldots \mp by \sin(C+D+\ldots+Y) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + ux \sin X - uy \sin(X+Y) \\
& \qquad + xy \sin Y].
\end{aligned}$$

Um also den Flächeninhalt eines Polygons von n Seiten aus seinen (n—1) Seiten und den von ihnen eingeschlossenen (n—2) Winkeln zu berechnen, nehme man die halbe algebraische Summe der Produkte aus je zwei der gegebenen Seiten mit dem Sinus der Summe der dazwischen liegenden Winkel, wobei das jedesmalige Partialprodukt positiv oder negativ genommen wird, je nachdem die Anzahl der zwischen den bezüglichen Seiten liegenden Winkel ungerade oder gerade ist.

Zur Anwendung der hier angegebenen Formeln mag folgendes, aus Unger's praktischen Uebungen entlehntes Zahlenbeispiel dienen: Von einem Sechseck ABCDEF kennt man die fünf Seiten AB = 61,9; BC = 52,6; CD = 45,8; DE = 37,4 und EF = 41,2, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel B = 121°35′; C = 103°25′; D = 140°18′ und E = 131°28′. Man findet den Flächeninhalt = 6027,469; die fehlende Seite AF = 53,41; Winkel F = 132° 21′ 43″ und Winkel A = 90° 52′ 17″.

Note 7 zu §. 58.

Auflösung einiger in diesem Paragraphen vorkommenden Aufgaben:

1) In Bezug auf Aufgabe VIII: Die Gleichung der Geraden AC (Fig. 43) ist $y = o$; die der Geraden AB ist $y = \frac{y'}{x'} x$, wenn x', y' die Coordinaten des Scheitels B sind; die der Geraden BC endlich ist $y - y' = \frac{y'}{x' - x''}(x - x'')$, wo x'' die Abscisse von C darstellt. Die Gleichungen der durch die Mitte dieser Geraden auf sie errichteten Senkrechten sind bezüglich: $x = \frac{x''}{2}$, $y - \frac{1}{2}y' = -\frac{x'}{y'}(x - \frac{1}{2}x')$, $y - \frac{1}{2}y' = -\frac{x' - x''}{y'}\left(x - \frac{x' + x''}{2}\right)$. Für die Coordinaten der beiden letzten Perpendikel findet man $x = \frac{x''}{2}$, $y = \frac{x'^2 + y'^2 - x'x''}{2y'}$; woraus hervorgeht, daß diese beiden Perpendikel sich in dem dritten Perpendikel treffen.

In dem allgemeinen Falle haben wir folgende Gleichungen:

Für die Gerade AB, $\beta = \frac{y'}{x'} \alpha$ (1); für die auf ihr errichtete Senk-

rechte DO, $y-\beta=-\frac{x'}{y'}(x-\alpha)$, (2). Für die Gerade BC, $\beta'=\frac{y'}{x'-x''}(\alpha'-x'')$; (3) für die auf ihr errichtete Senkrechte FO, $y-\beta'=-\left[\frac{x'-x''}{y'}\right](x-\alpha')$. (4)

Indem wir $\beta=\beta'$ machen, drücken wir damit aus, daß die Fußpunkte D und F der Perpendikel auf einer zur Basis parallelen Geraden DF liegen.

Die Gleichungen (1) und (2) geben $\alpha=\frac{x'(yy'+x'x)}{y'^2+x'^2}$.

Die Gleichungen (3) und (4) liefern $\alpha'=\frac{(x'-x'')[yy'+x(x'-x'')]+y'^2x''}{y'^2+(x'-x'')^2}$.

Ferner haben wir $\alpha(x'-x'')=x'\alpha'-x'x''$ als Bedingungsgleichung. Eliminirt man aus dieser letztern die Größen α und α' mit Hülfe der vorhergehenden Ausdrücke, so erhält man für den gesuchten Ort die Gleichung, $y=\frac{y'^2+x''x'-x'^2}{y'(2x'-x'')}x+\frac{(x'-x'')(y'^2+x'^2)}{y'(2x'-x'')}$; d. h. eine durch den Scheitel B gehende gerade Linie, weil für $x=x'$ man $y=y'$ hat.

2) In Bezug auf Aufgabe IX. Die Gleichungen der die Mitte der Seiten mit den gegenüber liegenden Scheiteln verbindenden Geraden CD, AF, BE (Fig. 43) sind folgende:

$$y=\frac{\frac{1}{2}y'}{\frac{1}{2}x'-x''}(x-x''),\ y=\frac{y'}{x'+x''}x,\ y=\frac{2y'}{2x'-x''}\left(x-\frac{x''}{2}\right),$$

wobei, wie vorhin, x', y' die Coordinaten des Scheitels B und x'' die Absciſſe von C darstellen. Bestimmt man aus je zwei dieser Gleichungen die Coordinaten der Durchschnittspunkte, so bekommt man in sämmtlichen drei Fällen dieselben Resultate, nämlich $x=\frac{x'+x''}{3}$, $y=\frac{y'}{3}$, woraus hervorgeht, daß die drei in Rede stehenden Geraden sich in einem Punkte schneiden.

In dem allgemeinen Falle haben wir für die Gleichungen der Geraden AB, $y=\frac{y'}{x'}x$; der Geraden BC, $y=\frac{y'}{x'-x''}(x-x'')$; der Geraden DC, $y=a(x-x'')$; der Geraden AF, $y=a'x$. Die Ordinate des Durchschnittspunktes der Geraden AB, DC ist $y=\frac{ay'x''}{ax'-y'}$; die des Durchschnittspunkts der Geraden BC und AF ist $y=\frac{a'y'x''}{y'-a'x'+a'x''}$. Setzt man diese beiden letzten Ordinaten einander gleich, um auszudrücken, daß die Gerade DF

der Seite AC parallel ist, wie es die Aufgabe verlangt, und eliminirt hierauf a und a' mittelst der Gleichungen der Geraden DC und AF; so erhält man als Gleichung des gesuchten Orts $y = \frac{2y'x}{2x'-x''} - \frac{y'x''}{2x'-x''}$, d. h. eine gerade Linie, die durch den Scheitel B und die Mitte von AC geht.

3) Hinsichtlich der hier gedachten drei Durchschnittspunkte bemerken wir noch folgenden Satz: Wird der Durchschnittspunkt O der drei aus den Scheiteln eines Dreiecks gefällten Perpendikel mit dem Durchschnittspunkte O'' der drei durch die Mitte der Seiten desselben und die gegenüberliegenden Winkelspitzen gezogenen Geraden durch eine gerade Linie mit einander verbunden; so liegt auf letzterer zugleich der Durchschnittspunkt O' der drei in den Halbirungspunkten der Seiten auf dieselben errichteten Senkrechten. Die Coordinaten des Punktes O sind:

$$x = x', \; y = \frac{x'}{y'}(x''-x');$$

die des Punktes O': $x = \frac{x''}{2}$, $y = \frac{x'^2 + y'^2 - x'x''}{2y'}$;

die des Punktes O'': $x = \frac{x'+x''}{3}$, $y = \frac{y'}{3}$.

Legt man nun durch O und O'' eine Gerade, so ist ihre Gleichung:

$$y - \frac{y'}{3} = \frac{\frac{x'}{y'}(x''-x') - \frac{y'}{3}}{x' - \frac{x'+x''}{3}} \left(x - \frac{x'+x''}{3}\right).$$

Setzt man in diese Gleichung $x = \frac{x''}{2}$, welches die Abscisse des Punktes O ist, so findet man $y = \frac{x'^2 + y'^2 - x'x''}{2y'}$, welches die Ordinate des Punktes O' ist. Die Punkte O, O' und O'' liegen also in gerader Linie.

4) In Bezug auf Aufgabe X. Nimmt man den Scheitel des Winkels zum Ursprung und den einen Schenkel zur Abscissenachse des rechtwinkligen Coordinatensystems, und bezeichnen x', y' die Coordinaten des gesuchten Punktes, so ist

$$\frac{y' - ax'}{\sqrt{(1+a^2)}} : y' = m : n, \text{ woraus } y' = \frac{nax'}{n + m\sqrt{(1+a^2)}}.$$

Liegt der Punkt ausserhalb der Schenkel des gegebenen Winkels, so findet man $y' = \frac{nax'}{n - m\sqrt{(1+a^2)}}$.

Note 8 zu §. 58.

Auf analytischem Wege zu untersuchen, ob die drei Linien, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, in einem Punkte zusammentreffen.

Der im gedachten Paragraphen enthaltenen Aufgabe I zufolge, ist die Gleichung der den Winkel BAC (Fig. 43) halbirenden Linie, $y = Ax$, wo $A = \frac{-1+\sqrt{(1+a^2)}}{a}$; die der den Winkel BCA halbirenden Linie, $y = B(x-x'')$, wo $B = \frac{-1-\sqrt{(1+b^2)}}{b}$; die der den Winkel ABC halbirenden Linie, $y-y' = C(x-x')$, wo $C = \frac{ab-1+\sqrt{[(1+a^2)(1+b^2)]}}{a+b}$. x', y' und x'' haben dieselbe Bedeutung wie in der vorigen Note, a und b drücken dagegen die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Seiten AB und BC mit AC bilden, aus. Für die Coordinaten des Durchschnittspunktes G der beiden ersten halbirenden Linien haben wir $x = \frac{Bx''}{B-A}$, $y = \frac{ABx''}{B-A}$. Die durch diesen Durchschnittspunkt G und den Scheitel B gelegte Gerade hat zur Gleichung: $y - y' = \frac{y'(B-A)-ABx''}{x'(B-A)-Bx''}(x-x')$. Treffen nun die drei Halbirungslinien in einem Punkt zusammen, so muß $C = \frac{y'(B-A)-ABx''}{x'(B-A)-Bx''}$ sein. Um zu sehen, ob dies stattfindet, bemerken wir, daß $y' = ax'$, $y' = b(x'-x'')$, hierdurch verwandelt sich der Ausdruck $\frac{y'(B-A)-ABx''}{x'(B-A)-Bx''}$ in $\frac{ba(B-A)-AB(b-a)}{aB-bA}$ (1). Multipliciren wir nun den zweiten Theil der Gleichung $C = \frac{ab-1+\sqrt{[(1+a^2)(1+b^2)]}}{a+b}$ oben und unten mit $\sqrt{(1+a^2)}+\sqrt{(1+b^2)}$, so entsteht: $C = \frac{b\sqrt{(1+a^2)}+a\sqrt{(1+b^2)}}{\sqrt{(1+a^2)}+\sqrt{(1+b^2)}}$. Es ist aber $A = \frac{a}{1+\sqrt{(1+a^2)}}$ und $B = \frac{b}{1-\sqrt{(1+b^2)}}$, woraus $\sqrt{(1+a^2)} = \frac{a-A}{A}$ und $\sqrt{(1+b^2)} = \frac{B-b}{B}$. Werden diese Werthe für die Wurzelgrößen in den letzten Ausdruck von C substituirt, so erhalten wir: $C = \frac{ba(B-A)-AB(b-a)}{aB-bA}$, welcher Ausdruck identisch mit (1) ist; unsere drei Geraden schneiden sich demnach in einem Punkte.

Note 9 zu §. 65.

Auflösung der in diesem Paragraphen gegebenen Aufgaben:

1) In Bezug auf Aufgabe I. Die Gleichungen des gegebenen Kreises und der gesuchten Linie sind beziehungsweise $x^2 + y^2 = r^2$ und $yy' + xx' = r^2$, wobei x', y' die Coordinaten des Berührungspunktes darstellen. Bezeichnen wir durch z die Absciſſe des Punktes, in welchem die Abscissenachse von der gesuchten Berührungslinie getroffen wird; so ist $x' = \frac{r^2}{z}$ und $y' = \frac{r}{z} \sqrt{(z^2 - r^2)}$. Wir haben ferner $a = -\frac{x'}{y'}$, wo a die trigonometrische Tangente des Winkels bedeutet, den die gegebene Gerade mit der Abscissenachse macht. Werden in die letzte Gleichung die obigen Werthe von x' und y' substituirt, so kommt $a = \frac{r}{\sqrt{(z^2 - r^2)}}$. Hieraus folgt: $z = \pm \frac{r\sqrt{(a^2+1)}}{a}$, $x' = \pm \frac{ar}{\sqrt{(a^2+1)}}$ und $y' = -\frac{r}{+\sqrt{(1+a^2)}}$; es gibt demnach jederzeit zwei reelle Auflösungen unserer Aufgabe.

2) In Bezug auf Aufgabe II. Es sei d die Distanz $C'C$ der Mittelpunkte der beiden Kreise, deren Radien r' und r sein mögen, z der Abstand des Mittelpunktes C von dem Durchschnittspunkte der gesuchten Berührungslinie mit der Centrallinie, und a die trigonometrische Tangente der beiden letztern Linien. Wir haben dann $a = \frac{r}{\sqrt{(z^2 - r^2)}}$ für den einen Kreis und $a = \frac{r'}{\sqrt{[(z+d)^2 - r'^2]}}$ für den andern Kreis. Diese beiden Werthe einander gleich gesetzt geben: $z = \frac{dr}{\pm r' - r}$, woraus man sieht, daß z jederzeit zwei reelle Werthe hat.

Um die Coordinaten der Berührungspunkte zu erhalten, bemerken wir, daß die Gleichung der Berührungslinie sowohl $y - \beta = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha)$, als auch $y - \beta' = -\frac{(\alpha' + d)}{\beta'}(x - \alpha')$ ist; wobei α, β die Coordinaten des Berührungspunktes für den einen Kreis sind, und α', β' dieselben Bedeutungen für den zweiten Kreis haben. Aus diesen beiden Gleichungen folgt: $\alpha = \frac{r^2}{z}$ und $\alpha' = -d + \frac{r'^2}{z+d}$. Führt man diese Werthe in die Gleichungen $\beta^2 + \alpha^2 = r^2$ und $(\alpha' + \delta)^2 + \beta'^2 = r'^2$ ein, so findet man $\beta = \pm \frac{r}{z} \sqrt{(z^2 - r^2)}$, $\beta' = \pm \frac{r'}{z+d} \sqrt{[(z+d)^2 - r'^2]}$. Im Allgemeinen haben wir also vier Auflösungen unserer Aufgabe.

Zwei Auflösungen (für die äußere Berührende) sind in den Formeln

$$z' = \frac{dr}{r'-r},\ \alpha = \frac{r^2}{z'},\ \beta = \pm \frac{r}{z'} \sqrt{(z'^2 - r^2)},$$

$$\alpha' = -d + \frac{r'^2}{z'+d},\ \beta' = \pm \frac{r'}{z'+d} \sqrt{[(z'+d)^2 - r'^2]},$$

zwei andere Auflösungen (für die innere Berührende) in den Formeln

$$z'' = -\frac{dr}{r'+r},\ \alpha = \frac{r^2}{z''},\ \beta = \pm \frac{r}{z''} \sqrt{(z''^2 - r^2)},$$

$$\alpha' = -d + \frac{r'^2}{z''+d},\ \beta' = \pm \frac{r'}{z''+d} \sqrt{[(z''+d)^2 - r'^2]}$$ enthalten.

Leicht ergeben sich aus diesen Werthen nachstehende Resultate:

I. Liegt jede der beiden Kreislinien ganz ausserhalb der andern, so gibt es vier reelle Auflösungen.

II. Liegt die eine Kreislinie ganz innerhalb der andern, so existirt keine reelle Auflösung.

III. Schneiden die beiden Kreislinien einander, so gibt es blos zwei reelle Auflösungen.

IV. Berühren sich die beiden Kreislinien von außen, so gibt es drei reelle Auflösungen, indem zwei Tangenten in eine zusammenfallen. Berühren sich dagegen die Kreislinien von innen, so existirt nur eine reelle Auflösung, indem zwei Tangenten in eine zusammenfallen.

3) In Bezug auf Aufgabe III. Es sei die gegebene Gerade die Abscissenachse und der Durchschnittspunkt derselben mit der durch die beiden gegebenen Punkte (x', y') und (x'', y'') gezogenen Geraden der Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten. Die Gleichung des gesuchten Kreises ist alsdann $(x-p)^2 + (y-r)^2 = r^2$, wenn man erwägt, daß $r = q$, weil der Kreis die Abscissenachse berühren soll. Setzt man $\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = a$, so erhält man für die Durchschnittspunkte der Geraden $y = ax$ und des Kreises die Gleichung $x^2 - \frac{2(p+ar)}{1+a^2}x + \frac{p^2}{1+a^2} = 0$. Die Wurzeln x' und x'' sind hier bekannt; folglich $x'+x'' = \frac{2(p+ar)}{1+a^2}$ und $x'x'' = \frac{p^2}{1+a^2}$, woraus sich nun die Unbekannten p und r bestimmen lassen. Daß der Werth von p auf die in den Elementen der Geometrie gegebene Construction führt, sieht man bald ein.

4) In Bezug auf Aufgabe IV. Man nehme den Scheitel A (Fig. 125) des gegebenen Winkels DAx als Ursprung, den einen Schenkel Ax zur

Abscissenachse der rechtwinkligen Coordinaten. Es seien nun α, β die Coordinaten des Mittelpunkts C des gegebenen Kreises, r sein Radius; ferner b die der Abscisse α entsprechende Ordinate NP der den Winkel DAx halbirenden Linie AC′, und x′, y′ die Coordinaten des Mittelpunktes C′ des gesuchten Kreises. Die gleichzeitige Berührung des letztern mit dem gegebenen Kreise und der Abscissenachse liefert die Gleichung $(r+y')^2 = (x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2$; es ist ferner $\frac{y'}{x'} = \frac{b}{\alpha}$. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen y′, so erhält man $x'^2 - 2\left[\alpha + b\left(\frac{r+\beta}{\alpha}\right)\right]x' = r^2 - \alpha^2 - \beta^2$. Durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung findet man $x' = \alpha + b\left[\frac{r+\beta}{\alpha}\right] \pm \sqrt{\left[\left(\alpha + b\left(\frac{r+\beta}{\alpha}\right)\right)^2 + r^2 - \alpha^2 - \beta^2\right]}$ (1); welcher Werth sich auf folgende Art construiren läßt: Man nehme AQ $= \beta + r$; die rechtwinklige Ordinate QR wird gleich $\frac{b}{\alpha}(\beta + r)$ sein. Man trage QR von P nach R′; es ist dann $AR' = \alpha + b\left[\frac{r+\beta}{\alpha}\right]$. Von A aus lege man an den gegebenen Kreis die Tangente AT; es ist dann $AT^2 = -r^2 + \alpha^2 + \beta^2$. Man verlängere nun NT über T hinaus und mache AS = AR′; es ist dann TS gleich dem Wurzelausdruck der Gleichung (1). Man mache endlich SV = AS und SV′ = ST; die Stücke TV und VV′ sind dann die beiden Werthe von x′. Der erste Werth entspricht dem Fall, in welchem der gegebene Kreis zwischen dem Scheitel des Winkels und dem zu construirenden Kreise liegt; während der zweite Werth dem Fall angehört, wo der gesuchte Kreis sich zwischen dem Scheitel des Winkels und dem gegebenen Kreise befindet.

Die Aufgabe wird unmöglich, wenn $\left[\alpha + b\left(\frac{r+\beta}{\alpha}\right)\right]^2 + r^2 - \alpha^2 - \beta^2$ negativ ist.

Note 10 zu §. 67.

Die Polargleichung der geraden Linie zu finden. Sind α, β die Coordinaten des Poles F in Bezug auf den Ursprung A der rechtwinkligen Coordinaten, ϑ der Winkel, welchen der Leitstrahl u mit einer durch den Pol F zur Achse der Abscissen parallel gelegten Geraden macht, und x, y die Coordinaten irgend eines Punktes M der geraden Linie; so hat man $x = \alpha + u\cos\vartheta$, $y = \beta + u\sin\vartheta$. Hierdurch verwandelt sich die Gleichung unserer Geraden $y = ax + b$ in $\beta + u\sin\vartheta = a\alpha + au\cos\vartheta + b$, oder $u = \frac{a\alpha + b - \beta}{\sin\vartheta - a\cos\vartheta}$. Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ wird, wenn man den ent-

sprechenden Werth von u durch m darstellt, $m = a\alpha + b - \beta$. Durch Einführung dieses Werthes geht die Polargleichung der geraden Linie in

$u = \frac{m}{\sin\vartheta - a\cos\vartheta}$ über.

Note 11 zu §. 74.

Den Flächeninhalt einer Ellipse, so wie einen Theil derselben zu finden.

1) Es seien ACB eine halbe Ellipse (Fig. 126), O der Mittelpunkt, $AO = a$ und $CO = b$ die halben Achsen derselben. Um den Ellipsenabschnitt $APN = E$ zu bestimmen, construire man über $AB = 2a$ als Durchmesser einen Halbkreis $AC'B$, denke sich dann AP in eine beliebige Anzahl gleicher Theile $PP' = P'P'' \ldots = h$ getheilt, durch alle Theilpunkte $P, P' \ldots$ senkrechte Ordinaten in der Ellipse und dem Kreise gezogen, und die Endpunkte N, N' und $M, M' \ldots$ dieser Ordinaten je zwei und zwei in beiden Curven durch gerade Linien mit einander verbunden. Hierdurch entstehen sowohl in der Ellipse als in dem Kreise eine Reihe von Trapezen, wie $PP'N'N$, $PP'M'M$, deren Summe wir in dem elliptischen Segment ANP durch S, und in dem Kreisabschnitt $AMP = K$ durch T darstellen wollen. Sind nun y, y' zwei beliebige auf einander folgende Ordinaten in der Ellipse, und Y, Y' solche in dem Kreise; so haben wir zur Bestimmung der Flächenräume s und t der beiden diesen Ordinaten entsprechenden Trapeze folgende Gleichungen:

$$s = \frac{(y+y')}{2}h,\ t = \frac{(Y+Y')}{2}h.$$

Nun ist allgemein, wenn der Ursprung im Scheitel A liegt,

$y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - x^2)}$ und $Y = \sqrt{(2ax - x^2)}$; folglich $\frac{s}{t} = \frac{b}{a}$.

Da die letztere Gleichung ihre Gültigkeit behält, wo man auch diese zusammengehörigen Trapeze nehmen mag; so ist $\frac{S}{T} = \frac{b}{a}$ oder $S = \frac{bT}{a}$.

Bezeichnen α und β die Größen, um welche das elliptische Segment E und der Kreisabschnitt K die Summen jener Trapeze beziehungsweise übertreffen; so sind die Flächeninhalte dieser Summen $E - \alpha$ und $K - \beta$. Hieraus folgt $E - \alpha = \frac{b}{a}K - \frac{b}{a}\beta$. Denken wir uns jetzt um die Ellipse über den Ordinaten derselben die äußern und innern Rechtecke construirt, so ist einleuchtend, daß der Unterschied zwischen der Summe der erstern und der der letztern kleiner, oder höchstens eben so groß als das Rechteck 2hb ist, das, wenn man die Anzahl der Theile, in welche AP getheilt

worden, hinlänglich groß nimmt, auf jeden beliebigen Grad von Kleinheit gebracht werden kann. Offenbar ist aber der Unterschied zwischen dem elliptischen Flächenstücke und der Summe der Trapeze kleiner, als der zwischen den Summen der äußern und innern Rechtecke, woraus hervorgeht, daß α kleiner als irgend eine noch so kleine Größe werden könne. Dasselbe läßt sich auch in Bezug auf $\frac{b}{a}\beta$ rücksichtlich des Kreises nachweisen. Das wahre Maß des elliptischen Flächenstücks ANP und die Größen $\frac{b}{a}K$, $-\alpha$, $-\frac{b}{a}\beta$ sind also vier Größen, die sich in demselben Falle befinden, wie die Größen A, B, α und β im §. 22 der niedern Algebra; es muß folglich $\frac{b}{a}K$ das Maß des elliptischen Segments ANP sein. Nun ist $K = \frac{a^2}{2}\,\text{arc}\left[\sin = \frac{\sqrt{(2ax - x^2)}}{a}\right] - \left[\frac{a-x}{2}\right]\sqrt{(2ax-x^2)}$; mithin $E = \frac{ab\,\text{arc}}{2}\left[\sin = \frac{\sqrt{(2ax - x^2)}}{a}\right] + \left[\frac{x-a}{2a}\right] b\sqrt{(2ax - x^2)}$.

Setzt man $x = 2a$, so wird der Inhalt der Ellipse $= \frac{ab\pi}{2}$. Die ganze Ellipse ist also einem Kreise gleich, der die mittlere Proportionale zwischen beiden Halbachsen zum Radius hat.

2) Um den Flächeninhalt des zwischen GP und FQ enthaltenen Trapezes, dessen eine Seite FG ein elliptischer Bogen ist, zu finden, braucht man blos AFQ von AGP abzuziehen. Für AP=x′ und AQ=x ist Fläche

$$FGPQ = F = \frac{b}{2a}\left[(x' - a)\sqrt{(2ax' - x'^2)} - (x - a)\sqrt{(2ax - x^2)}\right] + \frac{ab}{2}\left[\text{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{(2ax'-x'^2)}}{a}\right) - \text{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{(2ax - x^2)}}{a}\right)\right],$$

oder

$$F = \frac{b}{2a}\left[(x' - a)\sqrt{(2ax' - x'^2)} - (x - a)\sqrt{(2ax - x^2)}\right] + \frac{ab}{2}\,\text{arc}\left[\sin = \frac{\sqrt{(2ax'-x'^2)}\,(x-a) - \sqrt{(2ax-x^2)}\,(x'-a)}{a}\right].$$

Note 12 zu §. 74.

Das Volumen eines durch die Umdrehung der elliptischen Fläche ANP um die Abscisse AP erzeugten Körpers zu bestimmen. Ein solcher Körper heißt ein elliptisches Konoid, während der durch die Rotation einer halben Ellipse um eine ihrer Achsen gebildete Raum Ellipsoid genannt

wird, und zwar ein längliches Ellipsoid, wenn die Bewegung um die große Achse geschieht, dagegen ein abgeplattetes Ellipsoid, wenn die Bewegung um die kleine Achse erfolgt. Behält man die vorhin gemachte Construction bei, so werden, wenn man sich das elliptische Segment ANP und den Kreisabschnitt AMP um AP herumgedreht vorstellt, durch die Dreiecke zwei Kegel und durch die Trapeze eben so viele abgestumpfte Kegel beschrieben, als solcher Trapeze vorhanden sind. Bezeichnet man nun das Volumen eines Kegels, welcher von dem zwischen den aufeinander folgenden Ellipseordinaten y und y′ enthaltenen Trapez beschrieben wird, durch s, und das Volumen des Kegels, welcher von dem zwischen den entsprechenden Kreisordinaten Y und Y′ enthaltenen Trapez erzeugt wird, durch t; so ist

$$s = \frac{h}{3}\pi(y^2 + y'^2 + yy') \text{ und } t = \frac{h\pi}{3}(Y^2 + Y'^2 + YY');$$

woraus entspringt $\frac{s}{t} = \frac{b^2}{a^2}$, wenn man erwägt, daß allgemein $y = \frac{b}{a}Y$.

Da diese Gleichung überall besteht, wo man auch die zusammengehörigen Trapeze wählen mag; so wird sich die Summe der Volumen aller Kegel in dem Konoid, die wir S nennen wollen, zu der Summe T der Volumen aller Kegel in dem Kugelsegment, ebenfalls wie $b^2 : a^2$ verhalten. Wir haben also, wenn α den Ueberschuß des Volumens E des Konoids über S, und β den Ueberschuß des Volumens K des Kugelsegments über T darstellt, die Gleichung: $E - \alpha = \frac{b^2}{a^2}(K - \beta)$. Offenbar ist aber der Unterschied zwischen E und S kleiner als der Unterschied zwischen den durch die Rotation der wie vorhin construirten Rechtecke erzeugten äussern und innern Cylinder, oder mit andern Worten kleiner als der Cylinder $2\pi hb^2$. Da nun dieser Cylinder kleiner als jede beliebige Größe werden kann, insofern man AP in eine hinlänglich große Anzahl von Theilen theilt; so kann auch α so klein werden, als man nur immer will. Das Nämliche gilt ebenfalls von β. Es ist daher

$$E = \frac{b^2}{a^2} K = \frac{b^2}{3a^2}\pi x^2(3a - x).$$

Nimmt man $x = 2a$, so erhält man den Inhalt des Ellipsoides, nämlich $E = \frac{4\pi ab^2}{3}$.

Das durch Umdrehung der halben Ellipse um die große Achse beschriebene Ellipsoid verhält sich also zu der Kugel, welche die große Achse zum Durchmesser hat, wie $b^2 : a^2$.

Dreht sich die elliptische Fläche um die kleine Achse, so erhält man auf eine ähnliche Weise für das Volumen E′ dieses elliptischen Konoids die

Gleichung $E' = \frac{a^2}{3b^2}\pi x^2(3b-x)$. Für $x=2b$ liefert diese Formel den Inhalt des abgeplatteten Ellipsoids, nämlich $E' = \frac{4a^2b\pi}{3}$. Man hat also $E:E' = b:a$; das längliche Ellipsoid verhält sich hiernach zu dem abgeplatteten, wie die kleine Achse zu der großen Achse.

Note 13 zu §. 80.

1) Es sei NAM' ein Hyperbelzweig (Fig. 127), C der Mittelpunkt, A der Scheitel, Cy' und Cx' die Asymptoten desselben, welche einen Winkel 2φ mit einander bilden. Man soll zuvörderst den Flächeninhalt $MPM'P'$, wo MP und $M'P'$ zur Asymptote Cy' parallel laufen, bestimmen. Wir verfahren zu diesem Behuf nach Grunert wie folgt:

Man setze $CP = x$, $PM = y$; $CP' = x'$, $P'M' = y'$. Der Asymptotengleichung der Hyperbel zufolge ist $x'y' = xy$; woraus $y' = \frac{xy}{x'} = \frac{xy}{x+z}$, wenn $PP' = z$ gesetzt wird. Man denke sich nun PP' in eine beliebige Anzahl n gleicher Theile h getheilt, durch alle Theilpunkte parallele Linien zur Asymptote Cy' gezogen, und die äussern und innern Parallelogramme construirt. Für die Summe T der Flächeninhalte der äussern Parallelogramme haben wir dann den Ausdruck

$$T = hxy\sin 2\varphi\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+h} + \frac{1}{x+2h} + \ldots + \frac{1}{x+(n-1)h}\right),$$

welcher, wenn man erwägt, daß $x = x' - nh$; $x+h = x'-(n-1)h$; $x+2h = x'-(n-2)h$; ... $x+(n-1)h = x'-h$; in

$$\begin{aligned}T = hxy\sin 2\varphi\Big(&\frac{1}{x'} + \frac{h}{x'^2} + \frac{h^2}{x'^3} + \ldots\\ &+ \frac{1}{x'} + \frac{2h}{x'^2} + \frac{2^2h^2}{x'^3} + \ldots\\ &+ \frac{1}{x'} + \frac{nh}{x'^2} + \frac{n^2h^2}{x'^3} + \ldots\\ &+ \ldots\Big),\end{aligned}$$

oder in

$$T = hxy\sin 2\varphi\left(\frac{n}{x'} + \frac{h}{x'^2}(1+2+3+\ldots+n) + \frac{h^2}{x'^3}(1^2+2^2+\ldots+n^2) + \ldots\right)$$

übergeht. Setzen wir hierin für die Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen die in der zehnten Note der niedern Algebra gefundenen Werthe, so haben wir

$$\begin{aligned}T = xy\sin 2\varphi\Big(&\frac{h}{x'}n + \frac{h^2}{x'^2}(\tfrac{1}{2}n^2 + an) + \frac{h^3}{x'^3}(\tfrac{1}{3}n^3 + bn^2 + b'n)\\ &+ \frac{h^4}{x'^4}(\tfrac{1}{4}n^4 + cn^3 + c'n^2 + c''n) + \text{u. s. w.}\Big),\end{aligned}$$

wo a, b, c ... gewisse constante Coefficienten darstellen, oder:

$$T = xy \sin 2\varphi \left(\frac{hn}{x'} + \frac{h^2n^2}{2x'^2} + \frac{h^3n^3}{3x'^3} + \frac{h^4n^4}{4x'^4} + \dots \right.$$
$$+ \frac{anh}{x'^2} \cdot h + \frac{bn^2h^2}{x'^3} \cdot h + \frac{b'nh}{x'^3} \cdot h^2$$
$$\left. + \frac{cn^3h^3}{x'^4} h + \frac{c'n^2h^2}{x'^4} h^2 + \frac{c''nh}{x'^4} \cdot h^3 + \text{u. s. w.} \right).$$

Wenn man diese Reihe nach den Potenzen von h ordnet und erwägt, daß $nh = z$, so kommt

$$T = xy \sin 2\varphi \left(\frac{z}{x'} + \frac{z^2}{2x'^2} + \frac{z^3}{3x'^3} + \dots + Ph \right).$$

wo Ph eine Größe bedeutet, die zugleich mit h abnimmt und verschwindet.

Bezeichnet nun α den Unterschied der Summe der Flächeninhalte der äussern Polygone über den Inhalt H des hyperbolischen Flächenstücks MPP′M′, so hat man

$$H + \alpha = xy \sin 2\varphi \left(\frac{z}{x'} + \frac{z^2}{2x'^2} + \frac{z^3}{3x'^3} + \dots + Ph \right).$$

Da aber der Unterschied zwischen den äussern und innern Parallelogrammen kleiner als das Parallelogramm $hy \sin 2\varphi$ ist, und man dasselbe so klein machen kann, als man will; so wird auch α kleiner als irgend eine kleine Größe werden können, weil der Flächeninhalt des Hyperbelstücks offenbar zwischen dem der äussern und innern Parallelogramme liegt. Man wird also haben:

$$H = xy \sin 2\varphi \left(\frac{z}{x'} + \frac{z^2}{2x'^2} + \frac{z^3}{3x'^3} + \frac{z^4}{4x'^4} + \dots \right), \text{ oder}$$

$$H = -xy \sin 2\varphi \left[\left(\frac{x}{x'} - 1\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{x'} - 1\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{x'} - 1\right)^3 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{x}{x'} - 1\right)^4 \dots \right]$$

Es ist aber $\log.\,\text{nat}\left[1 + \left(\frac{x}{x'} - 1\right)\right] = \log.\,\frac{x}{x'} =$

$$\left(\frac{x}{x'} - 1\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{x'} - 1\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left[\frac{x}{x'} - 1\right]^3 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{x}{x'} - 1\right)^4 + \dots$$

(Siehe die höhere Algebra).

Folglich $H = xy \sin 2\varphi \log.\,\text{nat} \frac{x'}{x} = m^2 \sin 2\varphi \log.\,\text{nat} \frac{x'}{x}$, weil $xy = m^2$, wo m^2 die Potenz der Hyperbel darstellt. Zieht man AB parallel mit Cy, so ist CB = AB = m. Daher Fläche ABM′P′ = $m^2 \sin 2\varphi \log.\text{nat} \frac{x'}{m}$. Setzt man AB = m = 1, so ist Fläche ABM′P′ = $\sin 2\varphi \log.\,\text{nat}\, x'$. Es verhalten sich also die hyperbolischen Paralleltrapeze wie die Logarithmen der Abscissen. Für die gleichseitige Hyperbel

ist $\sin 2\varphi = 1$; die hyperbolischen Flächenräume ABM′P′ können daher als die natürlichen Logarithmen der Abscissen CP′ betrachtet werden. Es ist dies der Grund, warum man die natürlichen Logarithmen auch hyperbolische nennt. Läßt man jedoch den Asymptotenwinkel 2φ sich ändern, so kann man sämmtliche Logarithmensysteme erhalten, für welche der Modul < 1 ist. Für die Basis 10 hat man den Modul $= 0{,}4342944819\ldots$ Man muß daher den Winkel suchen, welcher diese Zahl zum Sinus hat. Man findet $2\varphi = 25^0\,44'\,25{,}47''$; es ist dies der Asymptotenwinkel einer Hyperbel, deren Potenz 1 ist, bei welcher die gemeinen oder Briggs'schen Logarithmen der Abscissen durch die entsprechenden Flächenräume dargestellt werden. Man sieht hieraus, daß die Benennung hyperbolische Logarithmen nicht ganz richtig ist, weil alle logarithmischen Systeme in den Flächenräumen verschiedener Hyperbeln ihre Darstellung finden.

2) Den Flächeninhalt des Stücks AQM′ zu finden, wobei M′Q eine senkrechte Ordinate ist. Man hat Fl. AQM′ = Dr. CQM′ — Fl. CAM′. Da $CB \times AB \sin 2\varphi = CP' \times MP' \sin 2\varphi$, so ist Dr. CAB = Dr. CM′P′.

Zieht man beiderseits das Dreieck COB ab, addirt dann zu beiden Resten das Flächenstück OAM′, so ist Fläche CAM′ = Fl. ABP′M′. Folglich Fl. $AQM' = \frac{xy}{2} - m^2 \sin 2\varphi \log.\text{nat}\,\frac{x'}{m}$, wobei CQ = x und QM′ = y ist. Nach den allgemeinen Transformationsformeln haben wir aber $x = x' \cos\varphi + y' \cos\varphi$, $y = x \sin\varphi - y' \sin\varphi$, wo x′, y′ die Coordinaten darstellen, die zu den Asymptoten parallel laufen. Ferner haben wir $y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}$ und $m = \frac{a}{2\cos\varphi}$; wornach $\frac{x'}{m} = \frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a}$.

Also Fläche $AQM' = \frac{b}{2a}\,x\sqrt{(x^2 - a^2)} - \tfrac{1}{2}ab \log.\text{nat}\,\frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a}$.

Note 14 zu §. 80.

Das Volumen eines durch Umdrehung des hyperbolischen Flächenstücks A′LR (Fig. 127) um A′R erzeugten Körpers (hyperbolischen Konoids oder Rotationshyperboloids) zu finden. Man denke sich AR in n gleiche Theile, deren jeder gleich h, getheilt, so daß x = nh ist. Errichtet man nun durch die Theilungspunkte senkrechte Ordinaten, construirt dann die äussern und innern Rechtecke, bezeichnet die Summe der bei der Umdrehung von A′LR um A′R von den äussern Rechtecken beschriebenen Cylinder durch T, den Inhalt des hyperbolischen Konoids durch H, und den Unterschied zwischen T und H durch α; so hat man $T = H + \alpha = h\pi\,(y'^2 + y''^2 + \ldots y^{(n)2})$.

Es ist aber $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax)$; folglich:

$$H + \alpha = \frac{b^2}{a^2}\pi h\,(2ah + h^2 + 2\cdot 2ah + 2^2h^2 + 2\cdot 3ah + 3^2h^2 + \ldots + 2.nah + n^2h^2),$$ oder

$$H + a = \frac{b^2\pi}{a^2}\,[2ah^2(1+2+3+\ldots n) + h^3(1+2^2+3^2+\ldots n^2)],$$ oder

$$H + \alpha = \frac{2b^2\pi h^2 n}{a}\left(\frac{n+1}{2}\right) + \frac{b^2\pi h^3 n}{a^2}\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{2n+1}{3}\right).$$

Entwickelt man und berücksichtigt dabei, daß $x = nh$, so entsteht $H + \alpha = \frac{\pi b^2}{3a^2}\,x^2(3a+x) + \frac{\pi b^2 xh}{2a^2}\left((x + 2a) + \frac{h}{3}\right)$, wo der von h abhängige Theil mit h zugleich abnimmt und verschwindet. Offenbar ist aber der Unterschied $T - H$ kleiner, als der Cylinder $\pi h y^2$, wenn wir $LR = y$ setzen, welcher Cylinder kleiner als jede gegebene Größe werden kann. Wir haben also $H = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\pi}{3}(3a+x)$.

Note 15 zu §. 84.

1) Den Flächeninhalt P des Parabelstücks APM (Fig. 128) zu finden. Man theile die Ordinate PM in n gleiche Theile, wo jeder gleich h ist, ziehe durch alle Theilpunkte Linien zur Achse der Parabel parallel. Man erhält $(n - 1)$ innere Rechtecke und n zum Theil ausserhalb der Parabel liegende Rechtecke. Man hat, wenn man die Summe der äussern Rechtecke gleich T setzt und erwägt, daß allgemein für die Parabel $y^2 = 2px$ ist, $T = hx + hx - \frac{h^3}{2p} + hx - \frac{2^2h^3}{2p} + \ldots + hx - \frac{(n-1)^2h^2}{2p}$, oder $P + \alpha = xy - \frac{h^3}{12p}(n-1)n(2n-1) = \frac{2}{3}xy - \frac{yh}{12p}(3y - h)$, wenn man den Ueberschuß von T über P durch α darstellt und berücksichtigt, daß $y = nh$ ist. Da nun der Unterschied zwischen den äussern und innern Rechtecken, d. h. das Rechteck hx so klein gemacht werden kann, als man nur will; so wird auch der Unterschied zwischen T und P, d. i. α kleiner als jede gegebene Größe werden können. Man hat also $P = \frac{2}{3}xy$, da der von h abhängige zweite Theil unserer obigen Gleichung ebenfalls auf jeden beliebigen Grad von Kleinheit gebracht werden kann.

2) Den Inhalt eines durch eine Sehne NM′ abgeschnittenen Parabelsegmentes NBM′ zu finden. Es sei $AP = x$, $PM' = y$, $AP' = x'$, $P'N = y'$. Man hat Parabelsegmente $NBM' = \frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}x'y' - \frac{(x-x')(y+y')}{2} = \frac{1}{12p}(y - y')^3$.

Note 16 zu §. 84.

Das Volumen des durch die Umdrehung des Parabelstücks AMP um die Abcisse AP erzeugten Körpers zu finden (Rotationsparaboloids oder parabolischen Konoids). Man theile die Abscisse in n gleiche Theile (h) und construire die n äussern und (n—1) innern Rechtecke, wie wir schon früher in ähnlichen Fällen gethan. Ist nun T die Summe der durch die äussern Rechtecke beschriebenen Cylinder, welche alle einerlei Höhe h haben, so erhalten wir $T = (1+2+3+\ldots+n)\,2ph^2\pi = \frac{n(n+1)}{2}2ph^2\pi = \frac{\pi}{2}xy^2 + \frac{\pi}{2}y^2h = P + \alpha$, wo P den Inhalt des parabolischen Konoids und α den Unterschied zwischen T und P bezeichnet. Nun kann der Unterschied zwischen der Summe der äussern und innern Cylinder, d. h. $2hp\pi x$ kleiner als jede beliebige Größe werden, mithin kann es auch der Unterschied zwischen T und P, d. h. α. Da dasselbe von der Größe $\frac{\pi}{2}y^2h$ gilt, so haben wir $P = \frac{\pi}{2}xy^2$.

Note 17 zu §. 125.

Curven derselben Art sind einander ähnlich, wenn ihre Hauptlinien oder Parameter, von denen ihre Construktion abhängig ist, einerlei Verhältniß zu einander haben. Hiernach sind alle Curven derselben Art, bei denen sich die Zahl solcher Parameter nur auf 1 beläuft, sofort einander ähnlich. Wie also zwei Kreise, in denen nur ein Parameter, nämlich der Halbmesser, vorkommt, ähnliche Curven sind, so sind es auch alle Parabeln, alle gleichseitige Hyperbeln. Zwei Ellipsen oder Hyperbeln sind jedoch erst dann einander ähnlich, wenn die ersten Achsen das nämliche Verhältniß wie die zweiten zu einander haben. Unsere obige Definition entspringt unmittelbar aus dem Begriff, welchen wir von der Aehnlichkeit zweier Figuren haben, wovon die eine im Kleinen das ist, was die andere im Großen, oder mit andern Worten, wo es in der einen keinen Punkt gibt, der nicht seinen entsprechenden, ähnlich liegenden oder homologen in der andern hätte, so daß der Abstand je zweier Punkte der einen Figur n mal so groß ist, als der Abstand der beiden homologen Punkte in der andern Figur, wobei n ein constantes Zahlenverhältniß für die beiden Figuren darstellt.

Note 18 zu §. 153.

Auflösung der in diesem Paragraphen gegebenen Probleme.

In Bezug auf Aufgabe IX. Wir nehmen die gerade Verbindungslinie AD der

Scheitelpunkte der gegebenen Winkel zur Abscissenachse, und den Punkt A zum Ursprung der Coordinaten an. Die Gleichung der Geraden AB ist $y=ax$, die der Geraden DB $y=a'(x-d)$, wo d die Abscisse von D darstellt. Da diese Geraden sich auf der Linie BE, deren Gleichung $y=h$ ist, schneiden, so hat man die Bedingungsgleichung $\frac{h}{a}=\frac{h+a'd}{a}$. Sind ferner $y=bx$ und $y=b'(x-d)$ die Gleichungen der beiden andern Schenkel AC und DC, so muß, der Bedingung der Aufgabe zufolge, $\frac{a-b}{1+ab}=1$, und $\frac{a'-b'}{1+a'b'}=1$ sein; woraus $a=\frac{1+b}{1-b}$ und $a'=\frac{1-b'}{1-b'}$ entsteht. Werden diese Ausdrücke in die obige Bedingungsgleichung substituirt, so erhält man $\frac{h(1-b)}{1+b}=\frac{h(1-b')+(1+b')d}{1+b'}$. Es ist aber $b=\frac{y}{x}$ und $b'=\frac{y}{x-d}$; folglich $\frac{h(x-y)}{x+y}=\frac{h(x-d-y)+d(x-d+y)}{x+y-d}$, oder $x^2+y^2+2xy-dx-(2h+d)y=o$. Die Curve gehört einer Parabel an, weil $B^2-4AC=o$. Da die Gleichung für $x=o$ und $y=o$, desgleichen für $x=d$ und $y=o$ befriedigt wird, so geht die Curve durch die Scheitelpunkte der gegebenen Winkel.

Ganz auf dieselbe Art wird die weniger specielle Aufgabe behandelt, die im Allgemeinen für den gesuchten Ort eine Linie zweiten Grades liefert.

2) In Bezug auf Aufgabe X. Wir wählen die Gerade AB (Fig. 97) zur Abscissenachse der rechtwinkligen Coordinaten, deren Ursprung in der Mitte von $AB=2c$ liegen mag. Bei dem gegebenen Verhältnisse $1:n$ haben wir $y^2+(c+x)^2=[y^2+(x-c)^2]n^2$; woraus folgt $y^2+x^2+2c\frac{(1+n^2)}{1-n^2}+c^2=o$. Der gesuchte Ort ist demnach ein Kreis, dessen Coordinaten des Mittelpunktes und Radius sind: $\frac{-c(1+n^2)}{1-n^2}$, o und $\frac{2nc}{1-n^2}$. Die Voraussetzung von $n=1$ liefert $x=o$, d. h. eine durch die Mitte der Geraden AB auf derselben senkrecht stehende Linie, wie sich von selbst versteht.

Was den zweiten Theil der Aufgabe anlangt, so ist der gesuchte Punkt M der Durchschnittspunkt zweier wie vorhin construirten Kreise.

3) In Bezug auf Aufgabe XI. Man wähle die gegebene Linie zur Abscissenachse und den Fußpunkt A der aus dem Mittelpunkte C des gegebenen Kreises auf dieselbe errichtete Senkrechten als Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten; setze ferner $AC=d$ und den Radius des gegebenen Kreises gleich r, und nenne x, y die Coordinaten des gesuchten

Punktes. Der Bedingung der Aufgabe gemäß erhält man dann $(r+y)^2 = (d-y)^2 + x^2$; woraus $x^2 = 2(d+r)y-(d^2-r^2)$. Der gesuchte Ort ist also eine Parabel, deren Achse mit der Ordinatenachse zusammenfällt und Scheitel in dem Punkte liegt, dessen Coordinaten $x=o$ und $y = \frac{d-r}{2}$ sind, und welche den Parameter gleich $2(d+r)$ hat.

4) In Bezug auf Aufgabe XII. Wir nehmen die Centrallinie der beiden gegebenen Kreise zur Abscissenachse und den Mittelpunkt des einen Kreises zum Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten. Bezeichnen wir durch r, r' die Radien der beiden Kreise, durch d den Abstand der Mittelpunkte derselben, und durch z den Radius eines der berührenden Kreise; so haben wir $(z-r)^2 = y^2 + x^2$ und $(z-r')^2 = y^2 + (d-x)^2$, wobei x, y die Coordinaten der gesuchten Punkte sind. Durch Elimination von z aus diesen beiden Gleichungen entsteht: $4(r-r')^2y^2 + 4((r-r')^2-d^2)x^2 - 4d[(r-r')^2 - d^2]x = [(r-r')^2-d^2]^2 = o \ldots (1)$; welches die Gleichung einer Hyperbel ist, wenn $d > r - r'$. Ein Zweig derselben gehört dem Mittelpunkte der äussern Berührungskreise an, während der andere Zweig den innern Berührungskreisen entspricht. Die Brennpunkte der Hyperbel liegen in den Mittelpunkten der gegebenen Kreise; $r-r'$ ist die erste und $\sqrt{[a^2-(r-r')^2]}$ die zweite Achse. Die Gleichung (1) entspricht einer Ellipse, wenn $d < r-r'$. Für $d = r - r'$ findet man $y = o$; d. h. der gesuchte Ort ist die Abscissenachse. — Für $r = r'$ erhält man $x = \frac{d}{2}$; d. h. der gesuchte Ort ist eine der Ordinatenachse parallellaufende Gerade.

5) In Bezug auf Aufgabe XIII. Es seien $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$ die Gleichung der auf ihre Achsen bezogenen Ellipse; ferner $y = ax + b$, $y = ax' + b'$ die Gleichungen zweier beliebigen Geraden. Verbindet man jede dieser letztern Gleichungen mit jener der Ellipse, indem man dabei bestimmt, daß die Secante in die Tangente übergehe; so erhält man folgende zwei Bedingungsgleichungen: $A^2a^2 + B^2 = b^2$, $A^2a'^2 + B^2 = b'^2$, oder, wenn man für b und b' ihre Werthe aus den Gleichungen der Geraden substituirt,

$$a^2 + \frac{2xy}{A^2-x^2}a + \frac{B^2-y^2}{A^2-x^2} = o, \quad a'^2 + \frac{2xy}{A^2-x^2}a' + \frac{B^2-y^2}{A^2-x^2} = o;$$

woraus man sieht, daß a und a' die Wurzeln einer dieser Gleichungen sind. Wir haben mithin $aa' = \frac{B^2-y^2}{A^2-x^2}$, oder $y^2 - aa'x^2 = B^2 - aa'A^2$. Der Annahme gemäß schneiden sich aber die Tangenten unter rechten Winkeln, daher $aa' = -1$. Hiernach erhält man $y^2 + x^2 = A^2 + B^2$; der gesuchte Ort ist also ein Kreis.

6) In Bezug auf Aufgabe XIV. Es sei die gegebene Basis b die Abscissenachse, ein Endpunkt derselben der Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten und t die Tangente der gegebenen Differenz der Winkel. Die Gleichungen der beiden Seiten des Dreiecks sind $y=ax$ und $y=a'(x-b)$; der Aufgabe zufolge ist aber $t=\frac{a+a'}{1-aa'}$. Setzt man hierin die für a und a' aus den vorigen Gleichungen sich ergebenden Werthe, so erhält man $tx^2-ty^2-2yx-tbx+by=0$ als Gleichung für den gesuchten Ort, der eine Hyperbel ist.

Note 19 zu §. 175.

Von der Spinnlinie.

Beschreibt man über $AB=2r$ einen Halbkreis ACB (Fig. 129), verlängert den Durchmesser AB um ein bestimmtes Stück $BD=a$, zieht alsdann die Halbmesser OC, OC'... und macht ihre Verlängerungen CM, CM'... bezüglich so groß, wie es die Proportion: Halbkreis: Bogen AC = BD: CM bestimmt, so geben die auf solche Weise erhaltenen Endpunkte M, M'... eine Curve AMD, die wegen ihrer Anwendung bei Spinnmaschinen, Spinnlinie oder Neoide heißt. Um ihre Gleichung zu finden, nehme man AD zur Abscissenachse und A zum Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten und bezeichne den Winkel AOM durch ϑ. Man hat auf der Stelle $MO=u=r+\frac{a}{\pi}\vartheta$ als Polargleichung unserer Curve. Ferner ist $y=u\sin\vartheta=\left(r+\frac{a}{\pi}\vartheta\right)\sin\vartheta$,

$$x=r-u\cos\vartheta=r-\left(r+\frac{a}{\pi}\vartheta\right)\cos\vartheta.$$

Aus beiden entsteht:

$$y^2+(r-x)^2=\left[r+\frac{a}{\pi}\operatorname{arc}\left(\tang=\frac{y}{r-x}\right)\right]^2,$$ für welche transcendente Coordinatengleichung das einfachere System der beiden vorhergehenden Gleichungen gebraucht wird.

Note 20 zu §. 175.

Von der Focale.

1) Durch einen auf dem geraden Kegel SDE (Fig. 130) liegenden Punkt A werde eine beliebige Anzahl auf der, den gedachten Punkt A und die Achse des Kegels SH enthaltenden Ebene senkrecht stehender Ebenen gelegt; es entstehen dadurch eben so viele Kegelschnitte, deren Mittelpunkte sich sämmtlich auf der Geraden xx' befinden werden, die zur Linie SD

parallel läuft und durch den Punkt I, die Mitte der Entfernung des Punktes A vom Scheitel des Kegels S geht. Die in der Ebene DSE liegende erste Achse eines jeden dieser Kegelschnitte schneidet nothwendigerweise immer die Gerade xx′, insofern sie derselben nicht parallel läuft, und zugleich ist ihr Durchschnittspunkt der Mittelpunkt der zugehörigen Curve. Denn aus der Construction ergeben sich von selbst ähnliche Dreiecke, wie AOI und AA′S, AIo und AaS, bei solchen ist nun AI = IS, folglich AO = A′O und Ao = oa. Der Punkt O ist demnach der Mittelpunkt der Ellipse, welche AA′ zur großen Achse, und o der Mittelpunkt der Hyperbel, die Aa zur Querachse hat. Bei der Parabel liegt der Mittelpunkt in einer unendlichen Entfernung, oder vielmehr es ist hier ein solcher gar nicht vorhanden.

Von dem Punkte A aus fälle man in der Ebene DSE die Linie AL senkrecht auf XX′ und nehme dieselben als Coordinatenachsen an. Legt man jetzt durch die Gerade IX eine Ebene senkrecht auf DSE, so entsteht eine Parabel, welche den Punkt I zum Scheitel und die Abscissenachse zur Achse hat. Die jeder Abscisse entsprechende Ordinate dieser Parabel kann nun zugleich als kleine Achse einer Ellipse betrachtet werden, welche durch eine von den durch den Punkt A geführten Ebenen hervorgeht. So z. B. könnte die der Abscisse IO zugehörige Parabelordinate auch als kleine Achse der Ellipse gelten, welche die Gerade AA′ zur großen Achse hätte. Steht die schneidende Ebene senkrecht auf der Achse des Kegels, so geht die Ellipse in den Kreis AC über, und die Parabelordinate ist dem Radius AB gleich. Der Eigenschaft der Parabel zufolge, haben wir aber, wenn d die halbe kleine Achse der Ellipse AA′ bedeutet: $d^2 : BA^2 = IO : IB$, woraus $d = BA\sqrt{\frac{IO}{IB}}$.

2) Wir gehen jetzt zur Bestimmung der Brennpunkte unserer Kegelschnitte über. Man setze $IA = IB = b$ und $LA = c$; es ist dann $LI = \sqrt{(b^2 - c^2)}$. Man setze ferner die Abscisse $LO = x$; es ist dann $AO = \sqrt{(x^2 + c^2)}$. Für die Excentricität OF hat man $OF^2 = AO^2 - d^2 = x^2 + c^2 - BA^2 . \frac{IO}{IB}$. Es ist aber $IO = x + \sqrt{(b^2 - c^2)}$, folglich $OF^2 = x^2 + c^2 - BA^2 . \frac{x + \sqrt{(b^2 - c^2)}}{b}$. Man hat jedoch $BA^2 = BL^2 + c^2$ und $BL = b - \sqrt{(b^2 - c^2)}$, mithin $BA^2 = 2b^2 - 2b\sqrt{(b^2 - c^2)}$. Wird dieser Werth in den letzten Ausdruck von OF^2 substituirt, so findet man $OF^2 = [x + \sqrt{(b^2 - c^2)}]^2 - 2b[x + \sqrt{(b^2 - c^2)}] + b^2$, oder $OF = x + \sqrt{(b^2 - c^2)} - b$ und $OF = b - x - \sqrt{(b^2 - c^2)}$. Wegen $x + \sqrt{(b^2 - c^2)} = IO$ entsteht hieraus entweder $OF = OI - b = OB$, oder $OF = b - OI$; wovon der erste Werth zu nehmen ist, wenn OI die constante Größe b

übertrifft, hingegen der zweite, wenn das Gegentheil statt findet. Sobald IO negativ ist, oder in einem entgegengesetzten Sinne von I aus nach X′ genommen wird, erhält man OF = b + OI, was sich an folgendem Beispiel nach deutlicher herausstellen wird. Es sei aA die Querachse einer Hyperbel, welche durch eine durch den Punkt A geführte Ebene entsteht. Der auf der Achse xx′ liegende Punkt o ist der Mittelpunkt unserer Hyperbel, und die Punkte f und f′ sind die Brennpunkte derselben, wenn of = of′ = Bo.

Um die Brennpunkte F und F′ der Ellipse AA′ zu erhalten, nimmt man also auf beiden Seiten des Punktes O die Entfernungen OF und OF′ = OB, d. h. gleich der Entfernung des Mittelpunktes der Ellipse von dem Mittelpunkte B des Kreises AC. Je größer der Winkel wird, den die Ordinatenachse AY und die große Achse einer Ellipse mit einander bilden, desto größer wird auch der Radius OB des stets durch den Punkt O gehenden Kreises, mit Hülfe dessen die Brennpunkte F und F′ jeder Ellipse bestimmt werden. Für den Fall, daß die schneidende Ebene AD′ auf der Ordinatenachse senkrecht steht, ist der Radius OB unendlich groß und die Kreislinie BFF′ geht in die auf AD′ aus B errichtete Senkrechte BG über. Der Punkt G ist alsdann der Brennpunkt der durch die Ebene AD′ entstandenen Parabel.

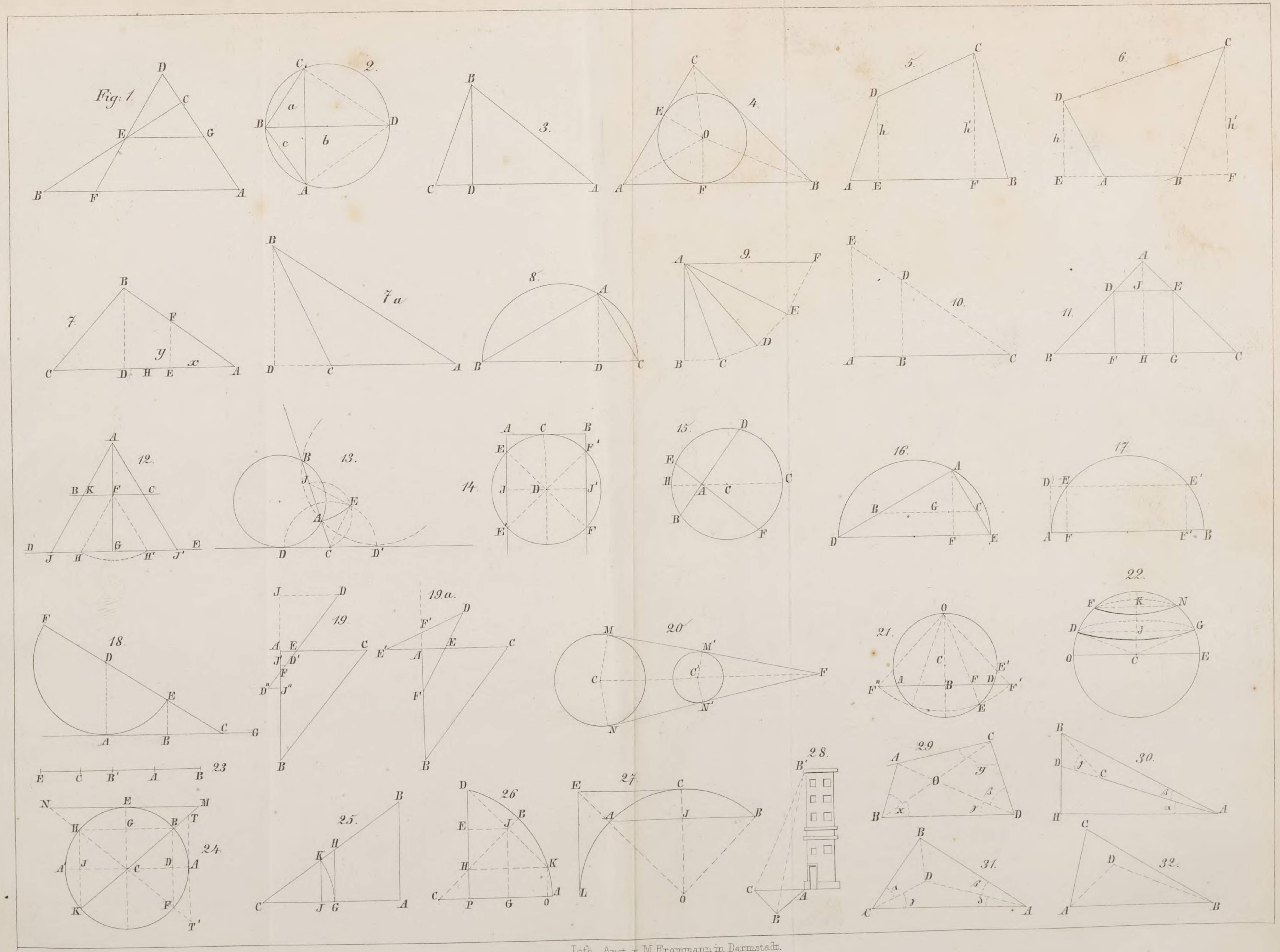
3) Wir wollen jetzt die Gleichung des geometrischen Orts der Brennpunkte sämmtlicher Kegelschnitte, welche durch die verschiedenen aus demselben Punkt A geführten Ebenen erhalten werden, aufsuchen. Unsere fragliche Curve entsteht aus dem fortwährenden Durchschnitte eines durch den Punkt B gelegten Kreises und einer durch den Punkt A gezogenen Geraden, deren Gleichungen bezüglich sind: $y^2+(x-\alpha^2)=r^2$ und $y=\beta x-c$. Man hat $\beta=\frac{c}{\alpha}$, mithin $y=\frac{c}{\alpha}x-c$, oder $\alpha=\frac{cx}{y+x}$; ferner ist $r=\alpha-b+\sqrt{(b^2-c^2)}=\alpha-m$, wenn man $b-\sqrt{(b^2-c^2)}=m$ setzt.

Führt man die ebengefundenen Werthe von α und r in die obige Gleichung des Kreises ein, so erhält man für den gesuchten Ort die Gleichung $y^2(y+c)+y(x^2-m^2)-c(x-m)^2=o$, welche einer Linie des dritten Grades entspricht. Mein sehr verehrter Lehrer, Ad. Quetelet, legte dieser Curve den Namen Focale bei.

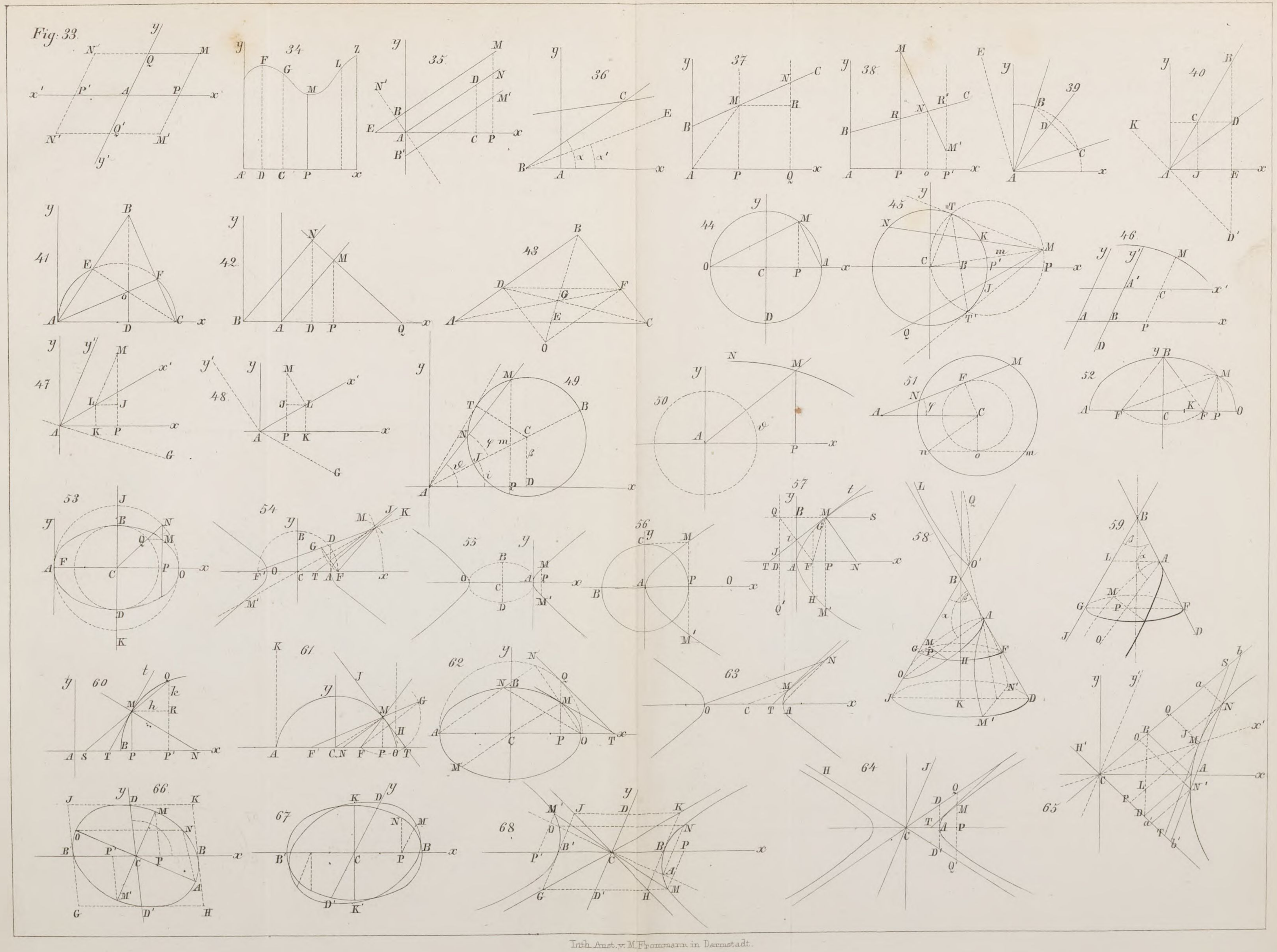
4) Geht der Kegel in einen Cylinder über, so fällt YA mit AC zusammen, und BL = m wird Null. Die Curve oder der Ort der Brennpunkte sämmtlicher Ellipsen, welche durch die verschiedenen durch den Punkt A des Cylindersmantels geführten Ebenen entstehen, hat dann die einfachere Gleichung: $y^2(y+c)+x^2(y-c)=o$.

Für jeden positiven und negativen Werth von y, welcher kleiner als c ist, erhält man zwei gleiche entgegengesetzte Werthe von x, die ima-

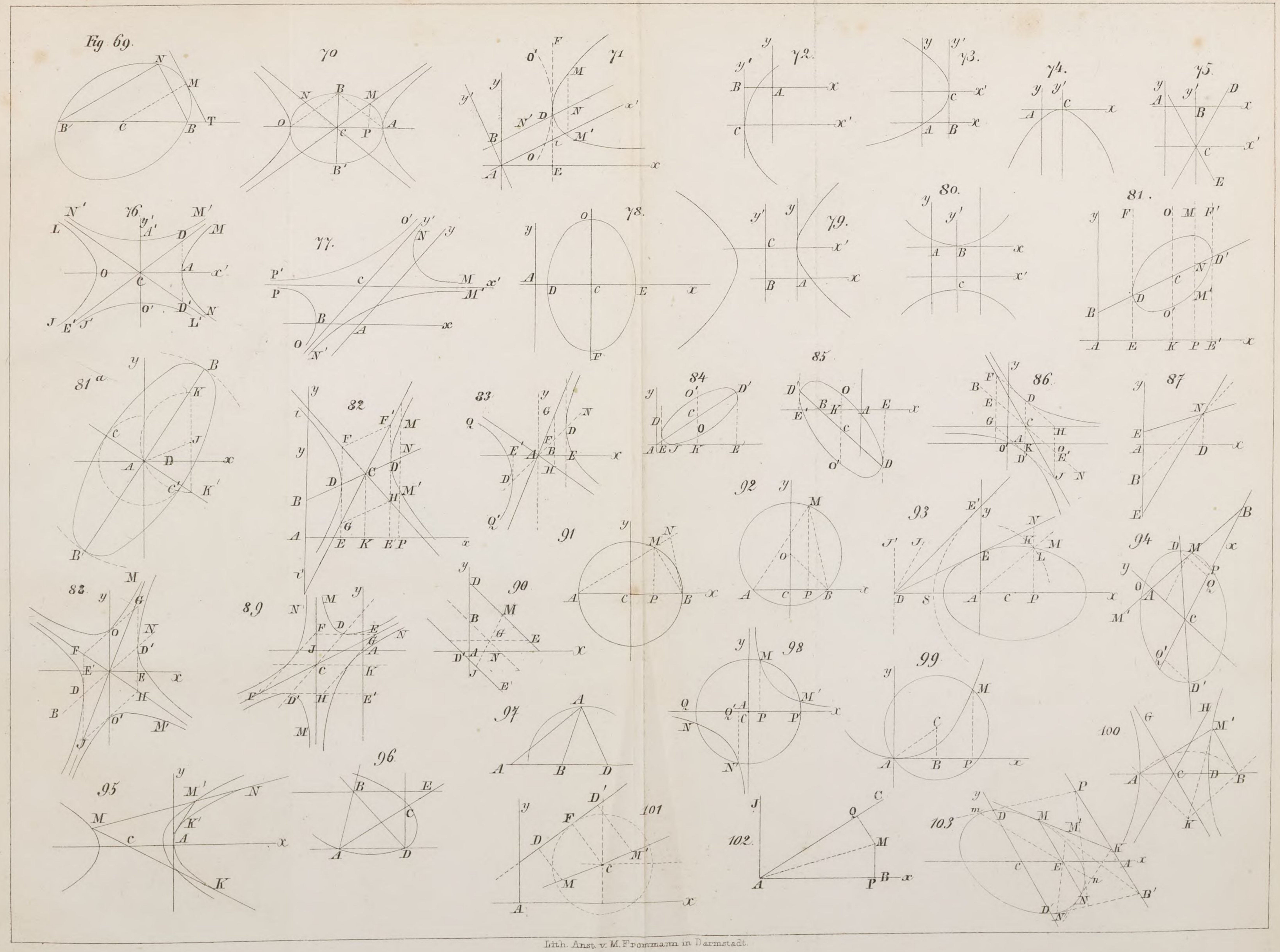
ginär werden, sobald y die Größe c übertrifft; unsere Curve liegt folglich symmetrisch rücksichtlich der Geraden AC, und ist in dem zwischen den auf derselben durch die Punkte A und C errichteten Senkrechten befindlichen Raum eingeschlossen, wie es zu erwarten war. Setzt man $x=0$, so kommt $y^2(1+y)=0$; die Curve geht also durch den Punkt A und hat in B einen sogenannten Doppelpunkt. Für $y=0$ findet man $x^2=0$; die Achse der x berührt demnach im Punkt B die Curve. Jedem x entsprechen drei reelle Werthe von y, so lange x eine gewisse Grenze nicht überschritten; über diese hinaus bleiben zwei Werthe von y imaginär. Es ergibt sich bald, daß die Gerade, welche $y=c$ zur Gleichung hat, eine Asymptote unserer Curve ist, die man reguläre Focale nennen könnte. Dieselbe besitzt überdies verschiedene merkwürdige Eigenschaften, die wir hier nicht weiter ausführen wollen.



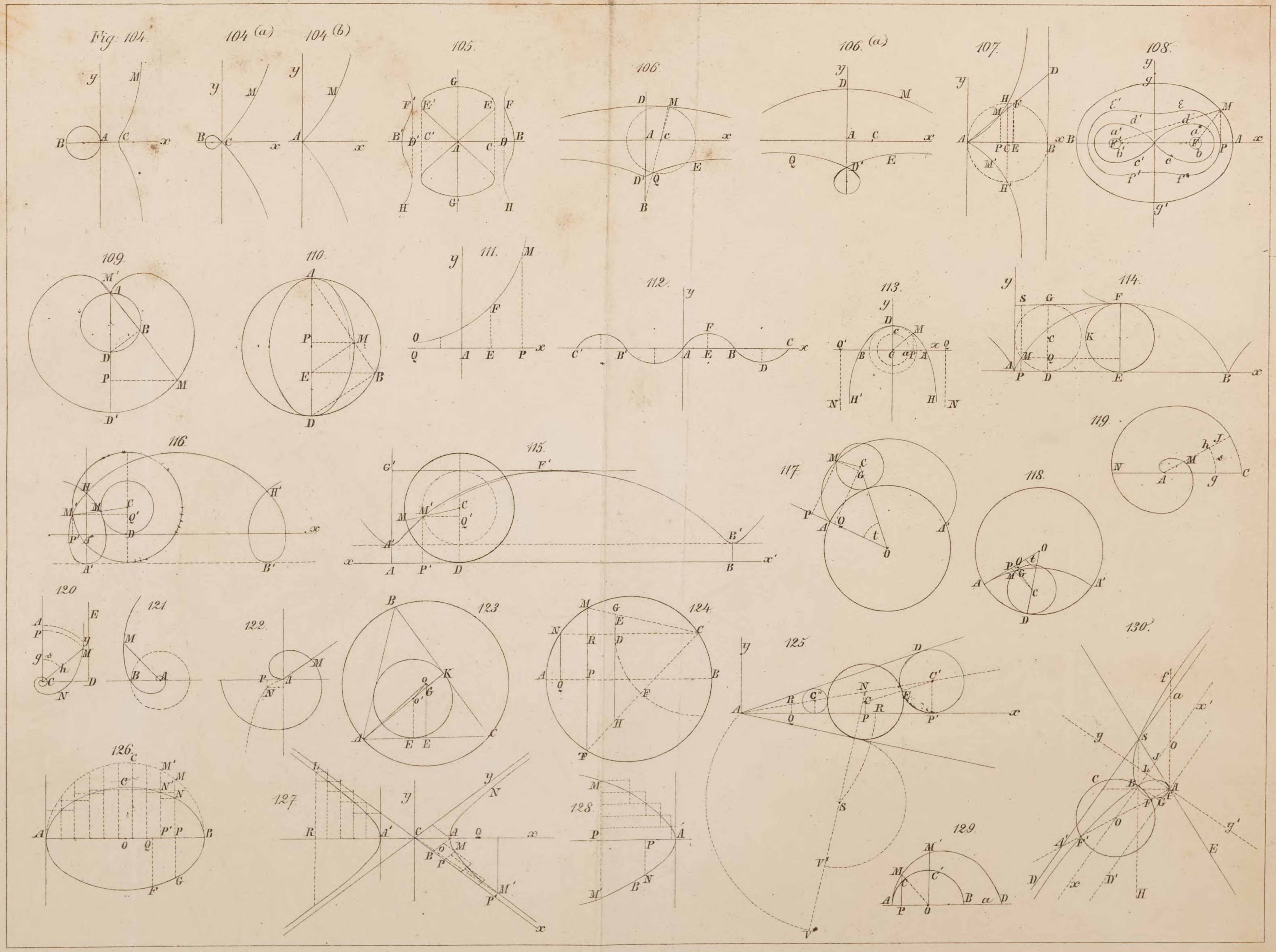
Lith. Anst. v. M. Frommann in Darmstadt.



Lith. Anst. v. M. Frommann in Darmstadt.



Lith. Anst. v. M. Frommann in Darmstadt.



Lith. Anst. v. M. Frommann in Darmstadt.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Francoeur, Louis Benjamin,

Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik

Bd.: 1. Band 4. Buch

1839

Coburg, Landesbibliothek -- Cas A 3580(1)#3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11928697-9